Aste ad oggetto multiplo

Lucia Parisio
Università di Milano-Bicocca

May 7, 2007

1 Aste simultanee

Consideriamo un'asta di tipo simultaneo, dove ciascun bidder può domandare uno o anche più oggetti identici tra loro. Ciascun bidder presenta una funzione di domanda (p, q) che comprende tutte le unità che egli desidera acquistare.

Supponiamo che le medesime unità possano essere vendute applicando due diverse regole di prezzo: *pay-as bid* (discriminativa) o *uniform price* (marginale).

La figura seguente illustra un caso di aste ad oggetto mulitplo, confrontando i comportamenti dei bidders date le due regole di prezzo.

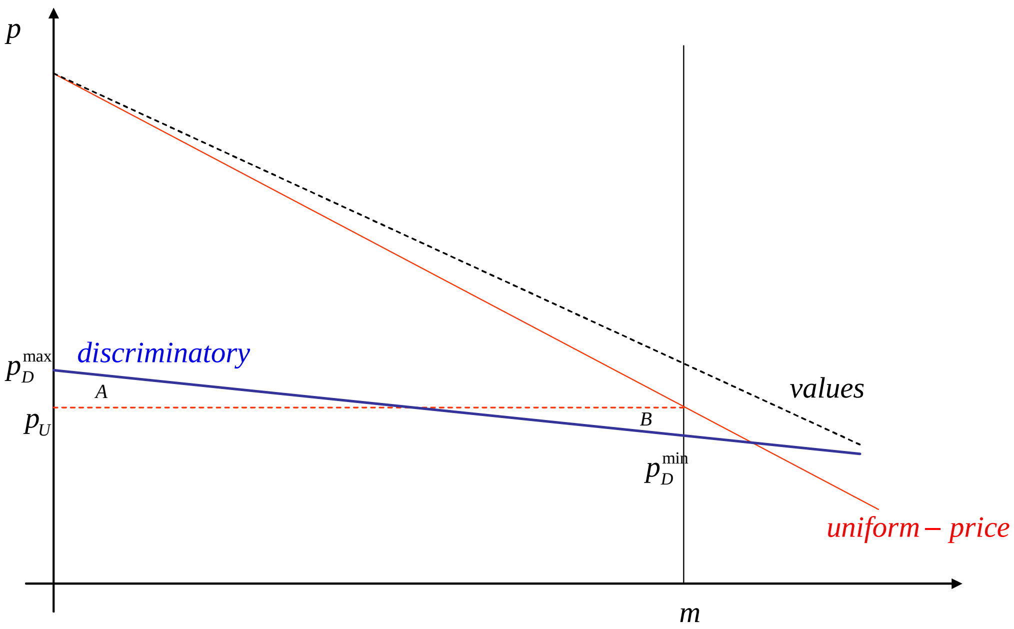
Le vere valutazioni sono illustrate dalla linea tratteggiata. La linea rossa indica i bids nell'asta a prezzo uniforme mentre la linea blu indica i bids nell'asta discriminativa. Nel primo caso, data un'offerta totale pari ad m si forma un prezzo p_U uguale per tutti, con un ricavo totale per il banditore pari a $(p_U.m)$. Nel secondo caso, le unità vengono vendute a prezzi diversi compresi tra $p_D^{\max}$ e $p_D^{\min}$, con un ricavo complessivo dato da:

$$\left[p_D^{\max} + p_D^{\min}\right] \frac{m}{2}$$

Il confronto tra le due regole di prezzo e la scelta tra l'alternativa che garantisce il maggior ricavo dipende da quale tra le due aree A o B è la maggiore. Se $A > B$ allora la procedure discriminativa sarà da preferire, mentre nel caso contrario sarà l'asta a prezzo uniforme a prevalere.

Come spieghiamo il diverso comportamento dei bidders rispetto alle due regole di prezzo? Lo studio delle aste di questi tipo, che abbiamo chiamato simultaneous dependent auction ha una lunga storia ricca di fraintendimenti. La letteratura economica si è interessata inizialmente di questo caso a proposito della vendita di titoli di stato. Questi titoli erano venduti con un'asta di tipo discriminativo e Friedman (1959) proponeva di passare ad una regola di prezzo uniforme, assumendo, erratamente, che la uniform price auction inducesse i bidders ad offrire le loro vere valutazioni per ogni unità desiderata. In altre parole si riteneva che l'asta uniform price assomigliasse all'asta SPSB (essendone una estensione ad m oggetti) e quindi avesse un equilibrio di *sincere bidding.* In realtà, l'estensione è corretta nel solo caso di singleton demand dei bidders. Al

Figure 1: Bid shading at multiple object auctions



contrario, qualora i bidders domandino più di un oggetto, Ausubel e Cramton (2002) dimostrano che:

- *bid shading* è strategia di equilibrio
- la strategia prevede $differential$ bid shading: i bidders che acquistano beni hanno l'incentivo a fare maggiore *bid shading* per le unità che essi valutano di meno (ovvero le ultime acquistate). Per questa ragione, nella figura la funzione di bid è più inclinata rispetto alla funzione di valutazione ed esse coincidono solo per la prima unità di bene acquistata (per la quale vi è effettivamente *sincere bidding*).

La spiegazione intuitiva del fenomeno è la seguente: quando un bidder desidera più unità e le unità in vendita sono molte, le ultime unità acquistate sono quelle che hanno la maggiore probabilità di fissare il prezzo di chiusura dell'asta. Si dice che esse possono essere $pivotal$. Di conseguenza, il bidder offre di meno sulle ultime unità per diminuire il prezzo atteso che egli pagherà su tutte le unità acquistate.

Al contrario nell'asta *pay as bid* ogni unità ha il suo prezzo e perciò il bid non ha questo effetto sulle altre unità acquisite.

2 Un esempio

Consideriamo un esempio con oggetti in vendita e due bidders X e Y. Il bidder X domanda una sola unità che egli valuta X^1 (poniamo che la seconda unità egli la valuti 0) mentre il bidder Y desidera due unità che valuta entrambe $Y^1 = Y^2$. Supponiamo che i valori $\left(X^1, Y^1, Y^2\right)$ vengano tratti dall'intervallo $[0,1]$ secondo una distribuzione uniforme. Ciascun bidder presenta due offerte non negative ed il banditore ordina le offerte attribuendo i due oggetti ai titolari delle due maggiori offerte.

Consideriamo in primo luogo la strategia degli agenti con la regola di prezzo uniforme: in tal caso sarà la terza maggiore offerta a determinare il prezzo. L'analisi dell'asta è qui molto semplice poichè vi sono solo due allocazioni possibili: 1) X ed Y vincono un oggetto ciascuno; 2) Y vince entrami gli oggetti ed X non ottiene nulla.

Osserviamo che in entrambi i casi il bid che concorre alla formazione del prezzo è quello sulla seconda unità: entrambi i bidders hanno perciò una strategia debolmente dominante di fare un bid pari alla valutazione sulla prima unità domandata. Perciò: $B_1^X = X^1$ e $B_1^Y = Y^1$.

Il vero problema è quello di capire quale sarà il bid di Y sulla seconda unità che egli desidera. Due sono le alternative:

1. Se $Y^2 < X^1$ il bidder Y ottiene un solo bene e paga B_2^Y (il suo secondo bid non è vincente ma fissa il prezzo che egli paga sulla prima unità acquisita
2. Se $Y^2 > X^1$ il bidder Y ottiene entrambi i beni e paga $B_1^X = X^1$

Complessivamente, il profitto atteso di Y è dato da:

$$\begin{aligned} E\left[\Pi_Y\right] &= \left(Y^2 - B_2^Y\right)\left(1 - B_2^Y\right) + \int_0^{B_2^Y} 2\left(Y^2 - X^1\right) dX^1 \\ &= Y^2 - \left(1 - Y^2\right) B_2^Y \end{aligned}$$

dove $\left(1 - B_2^Y\right)$ indica la probabilità che il bid (sincero) di X sia superiore al bid di Y sulla seconda unità. E' evidente che un bid $B_2^Y = 0$ è ottimale per Y. In altre parole, il bidder Y si comporta come se la seconda unità non gli interessasse: egli ne vincerà una sola, ma otterrà di pagare un prezzo pari a 0.

L'esempio riportato è estremo, ma illustra con chiarezza quali forze siano in gioco nelle aste ad oggetto multiplo. Osserviamo poi che l'efficienza della allocazione finale non è garantita: infatti potrebbe essere che $Y^2 > X^1$ e quindi il bidder Y rinuncia alla sua seconda unità quando invece l'efficienza vorrebbe che fosse sua. Ciò non si verifica nell'asta discriminativa dove avremmo avuto una serie di bids rispettivamente dati da: *Bidder* Y : $\frac{1}{2}Y^1 = \frac{1}{2}Y^2$; *Bidder* X : $\frac{1}{2}X^1$. Il banditore avrebbe avuto un ricavo complessivo pari a Y^1 se $Y^1 > X^1$ e da $\frac{1}{2}(X^1 + Y^1)$ se $X^1 > Y^1$. L'asta discriminativa avrebbe raggiunto una allocazione efficiente ed avrebbe garantito un ricavo positivo al banditore. La ragione è che il bid shading esiste nell'asta discriminativa ma non varia al variare delle unità acquisite.

Due sono i risultati di Ausubel e Cramton (2002) importanti: 1) efficienza richiede flat bid functions rispetto alla quantità; 2) se tutti gli avversari presentano una flat bid function non è un equilibrio per il bidder rispondere con una flat bid function a sua volta.

3 Regole alternative: Ausubel auction

Ausubel (2004) ha proposto una regola di prezzo alternativa che supere i problemi della uniform-price auction. Questa nuova regola è fondata su due osservazioni: il prezzo pagato da ogni vincitore deve essere indipendente dal suo bid e, secondo, l'asta deve trasmettere ai partecipanti la massima informazione disponibile. L'asta di Vickrey generalizzata soddisfa il primo principio ma non il secondo.

Nell'asta di Ausubel il banditore annuncia un prezzo ed i partecipanti rispondono con le quantità desiderate a quel prezzo. Il processo continua con aumenti di prezzo fino a che la domanda non uguaglia l'offerta. Il prezzo di ogni unità però non uguaglia il prezzo finale, bensì esso viene calcolato verificando ad ogni passaggio se per ogni bidder i la domanda aggregata degli avversari è inferiore all'offerta. Quando ciò si verifica, l'eccesso di offerta viene aggiudicato al bidder i al prezzo corrente.

Prendiamo un esempio ormai classico con 5 bidders A B C D E e 5 oggetti in vendita. Ogni bidder ne desidera acquistare al massimo 3.

Valore	A	B	C	D	E
unit 1	123	75	125	85	45
unit 2	113	5	125	65	25
unit 3	103	3	49	7	5

Al crescere del prezzo i bidders riducono la loro domanda. Ad esempio ad un prezzo pari a 46 il bidder E esce del tutto dall'asta, mentre il bidder D domanda 2 unità, il bidder C ne domanda 3, il bidder B una unità ed il bidder A ne domanda 3 per un totale di 9 unità domandate contro 5 unità offerte. Ad un prezzo di 66 avremo invece che A domanda 3, B domanda 1, C domanda 2 e D domanda 1. Quindi gli avversari di A domandano un totale di 4 unità al prezzo di 66 rispetto ad una offerta di 5. A è quindi sicuro di ottenere una prima unità a 66.

Al crescere ulteriore del prezzo arriviamo a 75 dove il bidder B esce del tutto dall'asta. Ora abbiamo che A domanda 3 unità, C ne domanda 2 e D ne domanda 1. Calcolando l'eccesso di offerta rispetto agli avversari per ogni bidder vediamo che A ora ottiene una seconda unità e C ne ottiene 1, entrambi al prezzo di 76. Quando il prezzo arriva appena sopra 85 l'asta chiude aggiudicando le due ultime unità ancora ad A e a C al prezzo di 86.

L'asta si rivela quindi efficiente poichè le 5 unità vengono aggiudicate ai bidders che le valutano di più ed inoltre vi è l'incentivo a rivelare le vere valutazioni.

Osserviamo che:

- Nel caso IPV l'asta di Ausubel ha risultati equivalenti all'asta di Vickrey generalizzata

- L'Asta di Ausubel è utilizzabile anche nel caso di valutazioni interdipendenti e mantiene le medesime proprietà allocative

- L'asta di Ausubel è orale ascendente e prevede la rivelazione delle domande ad ogni passaggio: è questa la ragione delle sua efficienza anche in contesti in cui non vale l'ipotesi IPV.