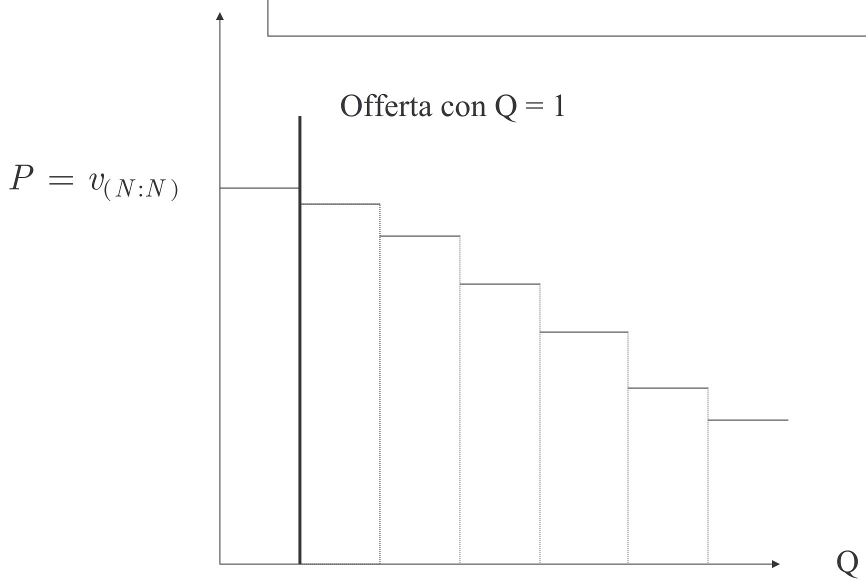
Definizione

– **L'asta come *one-side market*. La parte che resta inattiva (di solito l'offerta) opera in regime di monopolio (monopsonio).**
– **L'asta come metodo di selezione della controparte dello scambio ⟶ asymmetric information problem**
– **L'asta come "list of rules with perfect commitment" ⟶ mechanism design approach**

Aste e mercati

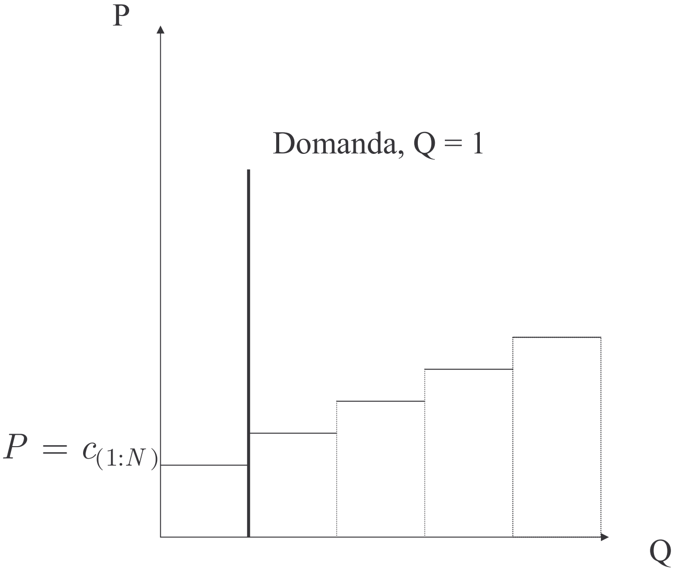
- **Nel caso di asta per la vendita di oggetti l'offerta è rigida e la domanda è inclinata negativamente.**
- **Supponiamo per un istante di vivere in un mondo di perfetta informazione. Ciascun partecipante all'asta ha una propria massima disponibilità a pagare per il bene in vendita.**
- **Se le disponibilità a pagare vengono ordinate in modo decrescente, dalla più alta alla più bassa, otteniamo una funzione di domanda, nota a tutti.**
- **Il banditore, che cerca di massimizzare il ricavo dalla vendita del bene, non dovrebbe allora fare altro che identificare l'individuo con la valutazione più elevata e sottoporgli una offerta a prezzo fisso.**
- **Il prezzo di vendita uguaglia la valutazione del vincitore.**

L’esito dell’asta coincide con il tipico esito di mercato



Asta per l’acquisto

- **Il banditore deve acquistare un oggetto (ad esempio una fornitura) da un’impresa privata. Le imprese si distinguono tra loro sulla base del prezzo praticato all’acquirente**
- **Supponiamo ancora che vi sia informazione completa e costruiamo la funzione di offerta ordinando in senso crescente le offerte**
- **Il banditore seleziona l’impresa che pratica il minor prezzo (che ha il minor costo, a parità di prodotto) e le impone un contratto a quel prezzo.**



Asta e mercato

- **Concludiamo che in presenza di perfetta informazione sui valori (prezzi/costi) dei partecipanti, l'esito dell'asta coincide con quello del mercato.**
- **La sollecitazione delle offerte tramite asta acquisisce la sua valenza specifica in presenza di informazione asimmetrica tra partecipanti:**
  - **Il venditore fronteggia un certo numero di acquirenti potenziali senza sapere chi tra loro valuta di più il bene ed in particolare quale valore egli assegni al bene.**
- **L'asta quindi in presenza di asimmetria delle informazioni ha uno scopo fondamentale: selezionare come vincitore colui che ha la maggior valutazione del bene**
- **In secondo luogo si determina una ripartizione del surplus derivante dallo scambio tra banditore e vincitore**

Scopo dell'asta

- **L'asta è quindi un meccanismo di selezione in presenza di informazione asimmetrica (ex-ante)**
- **Nozione di meccanismo d'asta:**
  - Il banditore detta alcune regole
  - I compratori potenziali decidono se partecipare
  - Il gioco d'asta si svolge secondo le regole (i partecipanti presentano le offerte)
  - Viene determinata una allocazione finale
- **Il ruolo del banditore è quindi quello di dettare le regole ex-ante**
- **I partecipanti adeguano le loro strategie alle regole del gioco.**

Regole essenziali d'asta

a) Oggetto dello scambio
b) Regole di ammissione
c) Presentazione dell'offerta
d) Regola di aggiudicazione
e) Regola di pagamento

a) numero di oggetti messi all'asta:

- Uno: caso classico (es. opera d'arte, contratto di appalto)
- un numero *m* di oggetti identici:
  - **uno per ogni vincitore**
  - **più oggetti per ogni vincitore**
- una quantità totale *Q* da dividersi per quote, non necessariamente identiche (es. aste per titoli di stato)

b) Regole di ammissione dei partecipanti all'asta:

- Aste aperte: a libera partecipazione, ad es. le aste on-line.
- Aste chiuse: dove la partecipazione è rigidamente ad invito.
- Modelli intermedi:
  - **Aste aperte alla partecipazione di categorie particolari di soggetti (ad es. imprese iscritte ad albi), o di agenti che comunque possiedano determinati requisiti prestabiliti.**
  - **Ammissione soggetta a garanzie atte a provare la "seria partecipazione" dei contendenti, (versamenti in denaro a titolo di deposito o anche a fondo perduto).**

c) Metodo di trasmissione delle offerte:

- In forma scritta (segreta);
- In forma orale (pubblica);
- In forma telematica (pubblica o privata)

d) Regola di aggiudicazione:

- Al maggior offerente (aste per la vendita)
- Al minor offerente (aste per l'acquisto)
- Offerta media
- Offerta media mediata
- Aggiudicazione su punteggio (metodo aggregativo compensatore)

e) Regola di pagamento:

– Primo prezzo (più alta offerta)
– Secondo prezzo (più alta offerta esclusa la vincitrice)
– All Pay (Charity auctions): tutti i partecipanti pagano la somma che hanno offerto, solo il maggior offerente ottiene il bene

Elementi accessori dell'asta

– Prezzo di riserva;
– Diritto di ingresso o cauzione;
– Regole anti-collusive.
– Possibilità di rilanci: in teoria si studiano aste statiche e dinamiche:
  - **Activity rules ed incrementi minimi (aste dinamiche)**

Classificazione delle aste

Valutazione dell'oggetto ed informazione:

- aste a valutazione privata
- a valutazione comune
- a valori interdipendenti

Aste a valutazione privata

Ciascun partecipante conosce il valore che egli attribuisce al bene. Il suo giudizio di valore è indipendente dalle valutazioni altrui

Il banditore non conosce le valutazioni dei partecipanti

v_i noto al bidder i

$v_{-i} = \left(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_N\right)$ valutazioni ignote

v_i è indipendente rispetto ad ogni elemento di v_{-i}

Aste a valor comune

Nessuno conosce il vero valore del bene ma osserva solo segnali informativi (che condizionano il valore atteso del bene)

Il valore del bene, una volta realizzato o noto è uguale per tutti, chiunque vinca l'asta

$E\left[S|v_i\right] =$ stima effettuata dall'agente con segnale v_i

$v_{-i} =$ segnali non osservati dal bidder i

Se il bidder i osservasse anche solo uno degli altri segnali, poniamo v_j

$E\left[S|v_i, v_j\right] =$ nuova stima di valore

La stima di valore è funzione di tutti i segnali

Aste a valori correlati

I giudizi di valore dei partecipanti sono correlati: osservare la valutazione altrui mi porta a rivedere la mia valutazione.

Cattura eventuali elementi di influenzabilità dei bidders

SINOSSI

		SCRITTO		ORALE	
		I Prezzo	II prezzo	I prezzo	II prezzo
Oggetto Singolo	IPV	FPSB	SPSB (Vickrey)	Dutch	English
	CPV	FPSB	SPSB (Vickrey)	Dutch	English
	CV	FPSB	SPSB (Vickrey)	Dutch	English

SINOSSI

		SCRITTO		ORALE	
		I Prezzo	II prezzo	I prezzo	II prezzo
Oggetto Singolo	IPV	FPSB	SPSB (Vickrey)	Dutch	English
	CPV	FPSB	SPSB (Vickrey)	Dutch	English
	CV	FPSB	SPSB (Vickrey)	Dutch	English

Modello IPV: Asta Inglese o Oral ascending bid auction.

– È la tipica asta orale al rialzo. Si parte da una base d'asta e ciascun offerente offre al rialzo sino a che la competizione si ferma, quando tutti i compratori tranne uno si sono ritirati.
– L’ultimo maggior offerente viene dichiarato vincitore.
– Egli paga un prezzo pari alla sua offerta finale.

Modello IPV: Asta Olandese o Oral descending bid auction

– Il banditore parte da un prezzo manifestamente elevato e, ad intervalli di tempo stabiliti, continua ad abbassarlo ad ammontare fisso fino a che un partecipante si dichiara disposto ad accettare il prezzo corrente.
– Nell’asta Olandese nessuno effettua offerte, tranne il vincitore.
– Il vincitore paga un prezzo pari a quello corrente nel momento in cui ha fermato la procedura.

Modello IPV: Asta in busta chiusa al primo prezzo (FPSB)

- Offerte in plichi sigillati.
- Tutte le offerte contenute nelle buste vengo rese pubbliche.
- L'oggetto dell'asta viene aggiudicato al maggior offerente
- Egli paga un prezzo pari alla sua offerta.

Modello IPV: Asta in busta chiusa al secondo prezzo (SPSB)

- Offerte in plico sigillato, come nel caso dell'asta al primo prezzo.
- Tutte le offerte contenute nelle buste vengo rese pubbliche.
- L'aggiudicazione avviene al maggior offerente
- Egli paga un prezzo pari alla seconda maggior offerta, cioè alla più alta offerta esclusa la sua.

Aste e teoria dei giochi

- **Le aste vengono studiate quali giochi statici con azioni simultanee e ad informazione incompleta.**
  - **Eccezione: l'Asta inglese è un gioco dinamico-sequenziale**
- **Informazione incompleta: i partecipanti non conoscono la caratteristica privata (il "tipo") di ciascuno degli avversari (ovvero le valutazioni del bene).**
- **Incertezza strategica: ciascun agente deve formare la propria strategia senza conoscere il comportamento tenuto dagli avversari**
  - **I giochi ad informazione completa sono caratterizzati dalla sola incertezza strategica**
- **Nei giochi d'asta c'è un elemento di informazione mancante oltre che la normale incertezza strategica.**

Possiamo allora dire che:

- I giochi ad informazione incompleta vengono trasformati in giochi ad informazione imperfetta grazie alla:
  - Soluzione di Harsanyi (1967/68): il gioco ad informazione incompleta viene trasformato in un gioco ad informazione imperfetta.
  - **Ovvero si trasforma il gioco assumendo che la Natura, facendo la prima mossa, abbia assegnato casualmente a ciascun agente la sua valutazione (tipo). Tutti gli agenti ricevono il loro tipo come una realizzazione indipendente di una variabile casuale di distribuzione nota a tutti indicata con** $F(v)$

- **Tutti i partecipanti conoscono la distribuzione che assumeremo identica.**
- **Grazie all'assunzione di imperfetta informazione sui tipi, diviene possibile applicare il concetto di equilibrio di Nash-Bayes alla soluzione del gioco d'asta.**
- **La mancanza di un concetto di equilibrio per giochi d'asta, prima della diffusione del teorema di Harsanyi, è il fatto che spiega la datazione relativamente recente della maggior parte dei lavori teorici sulle aste, fatta eccezione per lo studio di Vickrey (Journal of Finance, 1961) che si occupa fondamentalmente di un'asta avente un equilibrio in strategie dominanti (che quindi non necessitava della assunzione di conoscenza comune della distribuzione delle valutazioni).**

Il gioco d'asta: richiami tecnici

i) Sia dato un insieme N di bidders (partecipanti, giocatori)

ii) Ciascun bidder i ha un insieme non vuoto di azioni (possibili offerte o bids) B_i a sua disposizione

iii) Per ciascun bidder i è dato un insieme di segnali V_i

iv) Ciascun bidder ha una funzione di payoff del gioco che gli assegna un risultato sulla base delle strategie e delle informazioni, formalmente:

$u_i : (b_1(v_1),\ldots,b_n(v_n))$

v) Una distribuzione di probabilità congiunta dei segnali:

$F(v_1, \ldots, v_n)$

che assumiamo conoscenza comune dei giocatori

vi) Definiamo strategia (pura) per il bidder i la funzione:

$\beta_i : V_i \rightarrow \mathrm{B}_i$

che chiameremo anche "funzione di bid" che

trasforma il suo segnale (valutazione) in offerta d'asta

Concetti di equilibrio del gioco rilevanti

Equilibrio in strategie dominanti:

Una strategia β_i domina (debolmente) un'altra strategia φ_i
se $\forall \mathbf{v} \in V, \forall \beta_{-i}$

$$u_i(\beta_i(v_i), \beta_{-i}, \mathbf{v}) \geq u_i(\varphi_i(v_i), \beta_{-i}, \mathbf{v})$$

Con disuguaglianza stretta per alcuni **x** e β_{-i}

Qualunque siano i tipi/valutazioni e qualunque siano le strategie degli avversari, il bidder i trae dal gioco un payoff maggiore seguendo la strategia β_i

Equilibrio di Nash-Bayes:

In un equilibrio di Nash-Bayes in strategie pure ciascun partecipante gioca una strategia che costituisce una risposta ottima alla distribuzione condizionata delle strategie dei suoi concorrenti che sia valida dato il tipo che gli viene assegnato dalla distribuzione originaria dei tipi.

$$E_v[u_i(\beta_1(v_1),...,\beta_i(v_i),...,\beta_n(v_n),V)|V_i = v_i] \geq$$
$$E_v[u_i(\beta_1(v_1),...,\varphi_i(v_i),...,\beta_n(v_n),V)|V_i = v_i]$$

Se $\beta_i, \beta_j = \beta, \forall i, j \in N$ abbiamo un equilibrio simmetrico.

Equilibrio di Nash-Bayes ex-ante: Un equilibrio ad interim (ovvero, dato il proprio tipo) è anche un equilibrio ex ante, ovvero prima che il tipo venga assegnato:

$$E[u_i(\beta(V),V)] \geq E[u_i(\varphi_i(v_i),\beta_{-i}(V_{-i}),V)]$$

Ovvero, β_i è risposta ottima rispetto a β_{-i} anche ex-ante, cioè prima che il bidder i abbia effettivamente conosciuto il suo tipo/valutazione

Strategie d'asta nel modello IPV

(valutazioni private indipendenti)

L'analisi economica dei modelli d'asta a valori privati indipendenti si regge su alcune assunzioni elencate di seguito:

- A1. Esiste un **unico bene** in vendita.
- A2. Esistono *n* partecipanti all'asta **neutrali al rischio**;

Ciascuno degli *n* acquirenti potenziali assegna al bene un valore (frutto dei suoi gusti e preferenze) indipendente rispetto a quello degli altri.

Indichiamo con:

$$v_1, v_2, .., v_i, ..., v_n$$

le valutazioni private degli acquirenti.

- A3. Informazione

L'agente *i* conosce solo il suo valore privato v_i

egli non osserva $v_{-i} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$

ovvero il vettore delle $(n-1)$ valutazioni degli avversari. Egli considera ciascuna delle valutazioni a lui sconosciute come realizzazioni di variabili casuali tratte dalla medesima distribuzione di probabilità, nota a tutti i partecipanti e comune ad essi.

Ciascuna delle valutazioni private è assunta indipendente rispetto alle altre.

A3. Il venditore massimizza il suo ricavo dalla vendita del bene.

- Assumiamo che egli assegni valore nullo al bene in vendita

A4. I compratori massimizzano il profitto atteso dall'asta:

$$E[\Pi_i] = (v_i - P)\Pr[W]$$

$$E[\Pi_i] = (v_i - P)\Pr[W]$$

- Il profitto atteso dal bidder *i* che ha una valutazione privata v_i è dato dalla differenza tra la sua stessa valutazione ed il prezzo pagato moltiplicato per la probabilità di vincere l'asta.
- L'aggiudicazione avviene secondo la regola del maggior offerente, quindi la probabilità di vincere l'asta corrisponde alla probabilità di avere presentato il più alto bid.

Estensioni del modello

- **Oggetto multiplo**: vengono messi in vendita più lotti identici del bene ed ogni vincitore ottiene una unità.
- **Avversione al rischio:** i partecipanti all'asta sono simmetricamente avversi al rischio e quindi massimizzano l'utilità attesa dell'asta.

Definizione della probabilità di vittoria nell'asta

- Consideriamo il bidder i che ha una valutazione v_i
- Egli non osserva le valutazioni dei suoi avversari, che egli considera variabili casuali tratte da una distribuzione di probabilità, avente densità positiva

$$F(\cdot), \text{ con } F'(v) = f(v)$$

$$v \in [0,V], \text{con } F(0) = 0; F(V) = 1$$

- Il supporto della distribuzione è dato dall'intervallo tra lo zero ed una massima possibile valutazione V.

L'incertezza per il bidder i è data dal vettore di variabili casuali indipendenti di dimensione (n-1):

$$v_{-i} = v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{+1}, \ldots, v_n$$

$$\left(v_{(n-1)} > v_{(n-2)} > \ldots > v_{(1)}\right)$$

Insieme ordinato di taglia (*n* - 1) delle valutazioni.

Quale è la probabilità che il bidder i, data v_i, abbia una valutazione dell'oggetto superiore a quella degli altri bidders?

Utilizzando le proprietà delle statistiche ordinate, costruiamo la densità di probabilità della valutazione più elevata tra le (*n*-1):

$$f_{(n-1:n-1)}(v_i) = \frac{(n-1)!}{(n-2)!} F(v_i)^{n-1} f(v_i)$$

La corrispondente cdf si ottiene integrando:

$$\int_0^{v_i} f_{(n-1,n-1)}(s)\,ds = F(v_i)^{n-1} =$$

$$\Pr ob\left[v_{(n-1)} \leq v_i\right] = Prob\left[\mathbf{v}_{(-i)} \leq v_i\right]$$

Che quindi definisce la probabilità di essere il bidder con la più elevata valutazione tra i partecipanti all'asta.

Questa probabilità non è ancora la probabilità di vincere l'asta, perché occorre tenere in considerazione il comportamento strategico dei partecipanti. In un gioco d'asta infatti non è sempre vero che l'offerta debba uguagliare la valutazione del partecipante.

- In alcuni casi, la strategia ottima di ciascun partecipante è effettivamente quella di presentare un bid pari alla valutazione allora la probabilità di vittoria coincide con la probabilità di avere la valutazione più elevata.

$$P[W] = F[v_i]^{n-1}$$

- Se l'asta non ha invece un equilibrio rivelatore, si procede considerando la strategia dei partecipanti e ricavando da questa la probabilità di vittoria.
- Poiché il nostro modello d'asta è simmetrico, prendiamo in considerazione una funzione di bid simmetrica (tutti i partecipanti si adeguano alla medesima strategia, data la loro valutazione)

Supponiamo che esista una strategia di equilibrio, detta anche funzione di bid, simmetrica e crescente, che indichiamo, nel caso del bidder *i* generico come:

$$b_i = \beta(v_i)$$

Poiché $\beta(\cdot)$ è equilibrio simmetrico, l'ordinamento dei bids coinciderà con l'ordine delle valutazioni, ovvero:

$$\beta\left(v_{(n-1)}\right) > ... > \beta\left(v_{(1)}\right)$$

La probabilità di vincere con un bid b_i, nell'equilibrio β è allora definita come segue (utilizzando la funzione inversa):

$$b_i > \beta\left(v_{(n-1)}\right)$$

$$\Pr\left[v_{(n-1)} \leq \beta^{-1}(b_i)\right] = F\left(\beta^{-1}(b_i)\right)^{n-1}$$

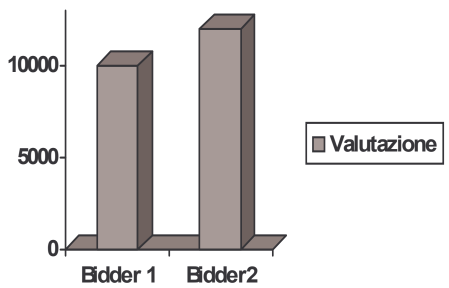
Asta inglese

- L'asta inglese procede per rilanci successivi ed è quindi un gioco dinamico. Indichiamo con *t* ogni fase (rilancio).
- La strategia ottima prevede per ciascun partecipante di restare attivo nella competizione fino a che il prezzo corrente non uguaglia il suo valore privato.
- Quando $P_t = v_i$ il *bidder i* abbandona l'asta, poiché rimanendo avrebbe un profitto positivo in caso di vittoria.

- Man mano che procedono i rilanci, alcuni bidders abbandonano l'asta.
- Alla fine resteranno solo due partecipanti in gara
- Quando uno dei due si ritira (non rilancia più), il banditore dichiara aggiudicato l'oggetto a colui che è rimasto in gioco
- Supponiamo che gli ultimi due partecipanti attivi abbiano una valutazione rispettivamente di 10.000 € e 12.000 €.

La fase finale del gioco:

– $(n-2)$ agenti hanno abbandonato la competizione



– Quando il prezzo corrente raggiunge il valore € 10.000, il bidder 1 abbandona l'asta.

A questo punto i casi sono due:

- **Se il rilancio a € 10.000 è stato fatto dal *bidder* 1, allora al *bidder* 2 basta incrementare del rilancio minimo (anche €1, se consentito) per vincere.**
- **Se il rilancio a € 10.000 è stato fatto dal *bidder* 2, allora il *bidder* 1 non rilancerà ulteriormente.**

- In ogni caso il vincitore pagherà un prezzo pari (o molto vicino) alla seconda maggior valutazione.
- In termini più precisi:

$$E[P] = E\left[v_{(n-1:n)}\right]$$

Il prezzo atteso di aggiudicazione uguaglia il valore atteso della seconda maggior valutazione

Il vincitore ha un profitto positivo dato dalla differenza attesa:

$$E\left[v_{(n:n)} - v_{(n-1:n)}\right]$$

Il banditore riceve un prezzo inferiore rispetto alla disponibilità a pagare del vincitore.

Asta in busta chiusa al secondo prezzo

- Il vincitore è il maggior offerente
- Il prezzo è pari alla seconda maggiore offerta
- Questa forma d'asta è frutto di una elaborazione teorica di W. Vickrey, il cui articolo del 1961 sul Journal of Finance, costituisce ancora oggi uno dei lavori fondamentali nella teoria delle aste
- È una forma d'asta assai poco usata nella prassi, perlomeno nella sua forma standard (vedere poi il caso delle aste on-line).

Una volta aperte le buste con le offerte, costruiamo la statistica ordinata:

$$b_{(n)} > b_{(n-1)} > b_{(n-2)} > .... > b_{(1)}$$

$$\Downarrow \qquad \downarrow\rightarrow \boxed{\text{Prezzo}}$$

Vincitore

$$E\left[\Pi_i\right] = \left[v_i - b_{(n-1)}\right]\Pr\left(b_i > b_{(n-1)}\right)$$

Osserviamo che il bid influenza solo la probabilità di vittoria e non il prezzo da pagare se vincitore.

L'asta SPSB ha una strategia dominante di tipo rivelatore:

$$b_i = v_i \; \forall i \in N$$

Ovvero ciascun bidder presenta una offerta pari alla sua valutazione.

La dimostrazione che questo è effettivamente un equilibrio si ottiene dimostrando che ogni possibile strategia alternativa è dominata dalla strategia suddetta

Due sono le possibili alternative. Confrontiamo perciò:

$$b_i = v_i \text{ contro } \varphi_i > v_i$$

Eliminazione delle strategie dominate

$$b_i = v_i \text{ domina la strategia } \varphi_i > v_i$$

Dimostriamo che l'overbidding (bid superiore alla valutazione) è dannoso:

Se $b_i = v_i$ è bid vincente, allora a maggior ragione è vincente anche $\varphi_i > v_i$. La strategia di overbidding è stata inutile.

Se $b_i = v_i$ non è vincente, allora $v_i < v_{(n-1:n)}$. Se $\varphi_i > v_i$ è vincente, allora abbiamo che:

$$v_i = b_i < v_{(n-1:n-1)} < \varphi_i$$

L'unico caso in cui la strategia di overbidding porta alla vittoria, è quello in cui la vittoria è dannosa poiché impone il pagamento di un prezzo maggiore della propria valutazione. Il bidder è in una situazione migliore se non vince l'asta (profitto nullo).

Allo stesso modo si dimostra che una strategia di underbidding è irrilevante oppure dannosa, nel senso che fa perdere probabilità di vittoria senza un effetto positivo sul profitto.

L'asta SPSB ha quindi un equilibrio rivelatore in strategie dominanti.

La distribuzione dei bids coincide con la distribuzione delle valutazioni.

Analisi di Vickrey (1961)

Il prezzo atteso nell'asta SPSB è pari al valore atteso della seconda maggiore valutazione. Supponendo valutazioni tutte tratte dall'intervallo [0, 100]

$$E\left[P\right]=E\left[v_{(n-1:n)}\right]=\int_0^{100} v f_{(n-1:n)}\left(v\right)dv$$

Distribuzione uniforme nell'intervallo $\left[0,100\right]$

$$F\left(v_i\right)=\frac{v_i-0}{100-0}=\frac{v_i}{100} \qquad f\left(v_i\right)=\frac{1}{100}$$

$$f_{(n-1:n)}\left(v\right)=n(n-1)F\left(v\right)^{n-2}(1-F\left(v\right))f\left(v\right)$$

$$=n(n-1)\left(\frac{v}{100}\right)^{n-2}\left(1-\frac{v}{100}\right)\frac{1}{100}$$

$$E[P_{SPSB}] = \int_0^{100} v \cdot n[n-1]\left(1-\frac{v}{100}\right)\left(\frac{v}{100}\right)^{n-2}\frac{1}{100}dv$$

$$= \int_0^{100} n[n-1]\left(1-\frac{v}{100}\right)\left(\frac{v}{100}\right)^{n-1}dv$$

$$= \int_0^{100} n[n-1]\left(\frac{v}{100}\right)^{n-1}dv - \int_0^{100} n[n-1]\left(\frac{v}{100}\right)^{n}dv$$

$$= \frac{(n-1)}{(100)^{n-1}}[(v)^n]_0^{100} - \frac{n[n-1]}{(100)^n}\left[\frac{1}{n+1}v^{n+1}\right]_0^{100}$$

$$= \frac{(n-1)}{(100)^{n-1}}[100^n - 0] - \frac{n[n-1]}{(100)^n}\left[\frac{1}{n+1}100^{n+1} - 0\right]$$

$$= (n-1)100 - \frac{n(n-1)}{(n+1)}100$$

$$= 100(n-1)\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = 100\frac{(n-1)}{(n+1)}$$

Quale è il prezzo che ciascun bidder si aspetta di pagare se vince l'asta?

Osserviamo il bidder che osserva una valutazione v_i

Il prezzo atteso condizionato dalla vittoria in asta SPSB è pari al valore atteso della maggiore valutazione dopo la sua (che assume essere la più elevata):

$v_{(n:n)} > v_{(n-1:n)} > \ldots > v_{(1:n)}$

Egli assume $v_{(n:n)} = v_i$; questo evento ha probabilità $F(v_i)^{n-1}$

ovvero n-1 valutazioni indipendenti devono essere inferiori a v_i

Tolta la valutazione v_i restano n-1 valutazioni avversarie, riscriviamo allora

$v_{(n-1:n-1)} > \ldots > v_{(1:n-1)}$

La pdf di $v_{(n-1:n-1)}$ si ottinene derivando $F(v_i)^{n-1}$ rispetto a v_i ovvero:

$$f_{(n-1:n-1)}(v_i) = (n-1)F(v_i)^{n-2} f(v_i) = (n-1)\left(\frac{v_i}{100}\right)^{n-2}\frac{1}{100}$$

Quindi:

$$E\left[P(v_i)\middle| win\right] = \frac{\int_0^{v_i} w(n-1)\left(\frac{w}{100}\right)^{n-2}\frac{1}{100}dw}{\left(\frac{v_i}{100}\right)^{n-1}} = \frac{\int_0^{v_i}(n-1)(w)^{n-1}\,dw}{(v_i)^{n-1}}$$

$$= \frac{\frac{n-1}{n}\left[w^n\right]_0^{v_i}}{(v_i)^{n-1}} = \frac{n-1}{n}\frac{v_i^n}{v_i^{n-1}} = \frac{n-1}{n}v_i$$

Il profitto atteso dal bidder i nell'asta è dato da:

$$E[\Pi_i] = (v_i - P)F(v_i)^{n-1}$$

Nel caso considerato:

$$= v_i\left(\frac{v_i}{100}\right)^{n-1} - \frac{v_i^n}{100^{n-1}}\frac{n-1}{n} = v_i\left(\frac{v_i}{100}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Posso leggere la formula come:

valutazione * prob. Vittoria/ numero partecipanti

Graficamente

È possibile rappresentare le funzioni precedenti in uno spazio che ha sulla base la probabilità di vittoria e sulla verticale la valutazione del bidder

Ad ogni valutazione possibile la funzione $F(\cdot)^{n-1}$ assegna una specifica probabilità di vittoria

Consideriamo inizialmente il caso più semplice di 2 soli bidders partecipanti all'asta e di valutazioni distribuite secondo una legge uniforme nell'intervallo [0, 100].

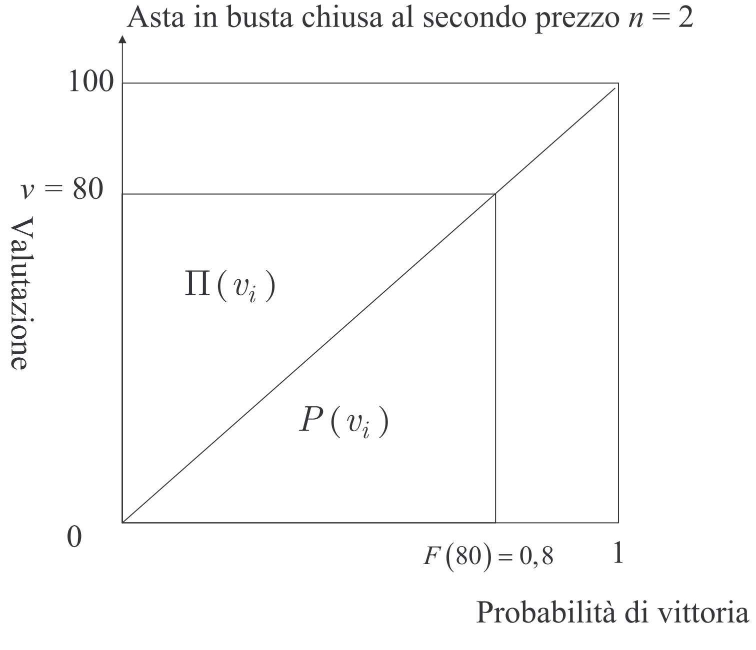
La probabilità di vittoria ed il profitto atteso, sostituendo $n = 2$

$$F(v_i)^{n-1} = \left(\frac{v_i}{100}\right)^{n-1} = \left(\frac{80}{100}\right)^{2-1} = 0,8$$

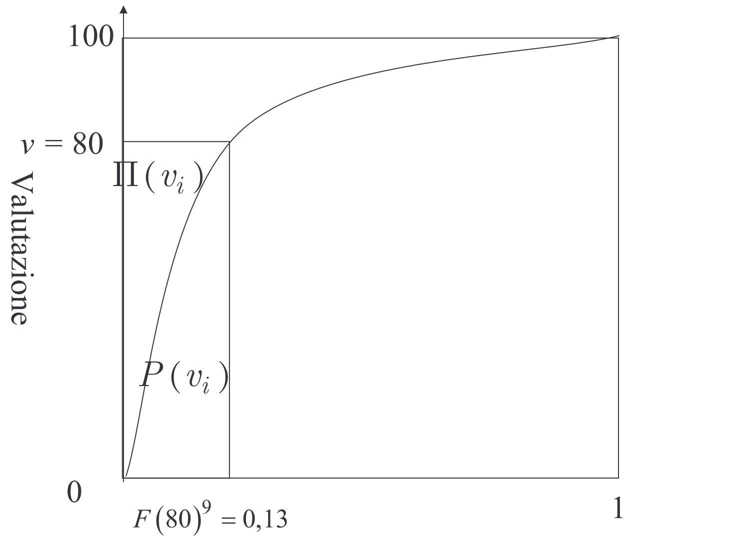
$$E[\Pi_i] = \frac{1}{2}\left(\frac{v_i}{100}\right)v_i$$

Nella figura successiva si nota facilmente che la formula sopra corrisponde all'area del triangolo che ha per base la prob. di vittoria e per altezza la valutazione:

Asta in busta chiusa al secondo prezzo $n = 2$



Asta in busta chiusa al secondo prezzo *n* generico (*n* = 10)



Asta in busta chiusa al primo prezzo

- Questa forma d'asta non ha un equilibrio rivelatore
- Troviamo la strategia di equilibrio assumendo che esista un equilibrio simmetrico, funzione crescente delle valutazioni di tutti i partecipanti all'asta diversi dal bidder *i*.

$$\beta_j(\cdot) = \beta(\cdot), \forall j \neq i, j \in N$$

- Il problema del bidder *i* è allora il seguente:

$$\max_b E[\Pi(b, v_i)] = [v_i - b]\left(F\left(\beta^{-1}(b)\right)\right)^{n-1}$$

Indica problema del partecipante *i* nell'equilibrio simmetrico β

Le condizioni del primo ordine, massimizzando rispetto a b:

$$-F\left(\beta^{-1}(b_i)\right)^{n-1} + (v_i - b_i)\frac{\partial F\left(\beta^{-1}(b_i)\right)^{n-1}}{\partial b_i} = 0$$

$$(v_i - b_i) = \frac{F\left(\beta^{-1}(b_i)\right)^{n-1}}{\frac{\partial F\left(\beta^{-1}(b_i)\right)^{n-1}}{\partial b_i}}$$

Poiché il termine a dx è positivo, deduciamo che il bid nell'asta FPSB è minore della valutazione. Trasformo evidenziando l'elasticità:

$$\frac{(v_i - b_i)}{b_i} = \frac{1}{\eta_{\Pr(W), b_i}}$$

Lo scarto % tra valutazione e bid è inversamente proporzionale all'elasticità della probabilità di vittoria al variare del bid.

Se β è strategia di equilibrio, $\beta^{-1}(b_i) = v_i$

$$\frac{\partial b}{\partial v} = (b - v)\frac{n - 1[F(v)]^{n-2} f(v)}{[F(v)]^{n-1}}$$

$$\frac{\partial b}{\partial v} = (b - v)(n - 1)\frac{f(v)}{[F(v)]}$$

La soluzione della equazione differenziale (n.b. la condizione iniziale è $\beta(0) = 0$) ci porta alla funzione di bid:

$$\beta(v_i) = v_i - \frac{\int_{\underline{v}}^{v_i} F(w)^{n-1} dw}{F(v_i)^{n-1}}$$

Esempio

Supponiamo che ciascuna valutazione privata dell'oggetto sia tratta da una distribuzione uniforme definita nell'intervallo [0,100].

$$F(v) = \frac{v}{100} \text{ e } f(v) = \frac{1}{100}$$

La strategia di equilibrio ha allora la forma molto semplice di:

$$\beta(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i$$

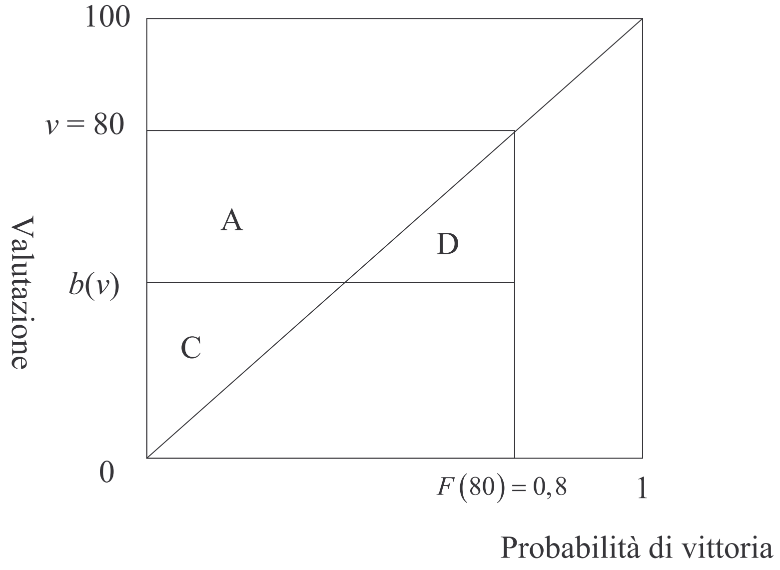
Infatti:

$$\beta(v_i) = v - \frac{\int_0^{v_i} \left(\frac{w}{100}\right)^{n-1} dw}{\left(\frac{v_i}{100}\right)^{n-1}}$$

$$= v_i \frac{n-1}{n}$$

Analisi grafica dell’asta al primo prezzo

Asta in busta chiusa al primo prezzo con $n = 2$



Il profitto atteso dell'asta è dato dall'area (A + D), ovvero:

$$(v_i - b_i)\left(\frac{v_i}{100}\right)$$

Il massimo possibile surplus estraibile da un'asta al primo prezzo è pari alla differenza attesa tra $v_{(n)}$ e $v_{(n-1)}$. In termini grafici (A + C), mentre in termini analitici:

$$\int_0^{v_i} \frac{w}{100} dw = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_i^2}{100}$$

Il profitto atteso posto uguale al max profitto possibile:

$$(v_i - b_i)\left(\frac{v_i}{100}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{100}v_i^2$$

semplifico

$$v_i - \frac{1}{2}v_i = b_i$$

$$\frac{1}{2}v_i = b_i$$

Il bid ottimo, dati due soli partecipanti all'asta è pari alla metà della propria valutazione privata. Quindi, nell'esempio a €40.

Quando il numero di bidders è maggiore di due, l'analisi grafica dell'equilibrio necessita dell'uso di integrali.

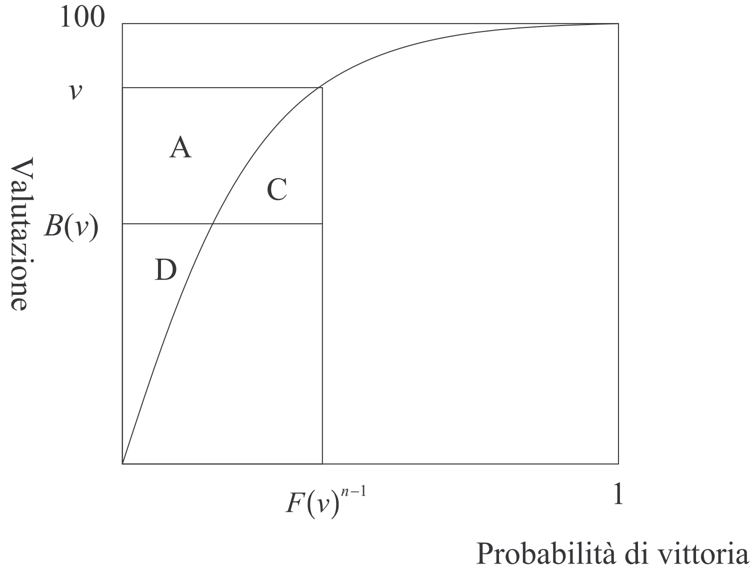
$$\text{area C} = \int_0^{\beta(v)} [F(w)]^{n-1}\,dw$$

$$\text{area D} = [v - \beta(v)][F(v)]^{n-1} - \int_{\beta(v)}^{v} [F(w)]^{n-1}\,dw$$

$$\text{area C} = \text{area D}$$

$$\beta(v) = v - \frac{\int_0^{v} [F(w)]^{n-1}\,dw}{[F(v)]^{n-1}}$$

Asta in busta chiusa al primo prezzo con *n* generico



Asta Olandese

- La strategia ottima prevede di fermare la procedura quando si raggiunge un prezzo pari a quello che si sarebbe offerto in un'asta in busta chiusa al primo prezzo. Il profitto atteso del vincitore è identico nei due casi.
- Questo risultato dipende dal fatto che l'asta olandese presenta al bidder il medesimo problema rispetto all'asta al primo prezzo. Lo spazio delle strategie e lo spazio dei segnali sono infatti identici nelle due procedure.
- Si dice allora che questi due tipi d'asta sono equivalenti strategici.

Il ricavo atteso del venditore

- Il ricavo atteso del venditore coincide con il prezzo atteso dell'asta
- Calcoliamo il prezzo atteso dal banditore nell'asta inglese e nell'asta in busta chiusa al secondo prezzo:
  - Il prezzo atteso è pari al valore atteso della seconda maggiore valutazione. Nel caso di distribuzione delle valutazioni uniforme nell'intervallo [0, 100], la formula del prezzo atteso è molto semplice (vedi pag. seg.).
  - Per il caso generale abbiamo poi (vedi due pagg. seg.)

Caso uniforme:

$$E\left[v_{(n-1:n)}\right] = \int_0^{100} wn\,(n-1)\left(\frac{w}{100}\right)^{n-2}\left(1-\frac{w}{100}\right)\frac{1}{100}\,dw$$

$$= 100\,\frac{(n-1)}{(n+1)}$$

Caso generale:

$$E[R]_{SPSB} = E\left[v_{(n-1:n)}\right]$$

$$= \int_0^V sn(n-1)F(s)^{n-2}[1-F(s)]f(s)\,ds$$

$$= \int_0^V sn(n-1)F(s)^{n-2} f(s)\,ds - \int_0^V sn(n-1)F(s)^{n-1} f(s)\,ds$$

$$= nV - n\int_0^V F(s)^{n-1}\,ds - (n-1)V + (n-1)\int_0^V F(s)^{n}\,ds$$

$$= V - n\int_0^V F(s)^{n-1}\,ds + (n-1)\int_0^V F(s)^{n}\,ds$$

Asta al primo prezzo

- Il ricavo atteso è pari al valore atteso del maggior bid.
- Il banditore deve perciò prendere il valore atteso rispetto a $v_{(n:n)}$ di:

$$\beta\left(v_{(n:n)}\right) = v_{(n:n)} - \frac{\int_0^{v_{(n:n)}} F(w)^{n-1}\,dw}{F\left(v_{(n:n)}\right)^{n-1}}$$

$$= v_{(n:n)}\frac{n-1}{n}$$

Dove nella ultima riga trattiamo il caso uniforme.

$$E\left[v_{(n:n)}\frac{n-1}{n}\right]=\frac{n-1}{n}\int_0^{100} wn\left(\frac{w}{100}\right)^{n-1}\frac{1}{100}\,dw$$
$$=(n-1)\left(\frac{1}{100}\right)^{n}\frac{100^{n+1}}{(n+1)}$$
$$=100\frac{(n-1)}{(n+1)}$$

Che è il medesimo risultato ottenuto nel caso dell'asta al secondo prezzo e dell'asta inglese.

Possiamo generalizzare questo risultato?

Il ricavo atteso del venditore: asta al primo prezzo (caso generale)

$$E[R]_{FPSB}=\int_0^{V}\beta(s_{(n:n)})f_{(n:n)}(s)\,ds$$
$$=\int_0^{V}\left[s-\frac{\int_0^{s}F(w)^{n-1}\,dw}{F(s)^{n-1}}\right]nF(s)^{n-1}f(s)\,ds$$

$$E(R)_{FPSB}=n\int_0^{V}\left[sF(s)^{n-1}-\int_0^{s}F(w)^{n-1}\,dw\right]f(s)\,ds$$

Separo gli integrali ed applico la regola della integrazione per parti al secondo termine:

$$\int_0^V \int_0^s F(w)^{n-1} dw f(s) ds = \int_0^V nF(s)^{n-1}(1 - F(s))ds$$

Sfruttando questa manipolazione ottengo: $E[R]_{FPSB} =$

$$n\int_0^V sf(s)F(s)^{n-1} ds - n\int_0^V F(s)^{n-1} ds + n\int_0^V F(s)^n ds$$

$$= V + (n-1)\int_0^V F(s)^n ds - n\int_0^V F(s)^{n-1} ds$$

Revenue equivalence theorem

- **Le quattro forme d'asta (Inglese, in busta chiusa al primo prezzo, in busta chiusa al secondo prezzo, olandese) garantiscono il medesimo ricavo atteso per il venditore.**

- **Attenzione, il risultato vale nel modello IPV, ovvero:**

a) **N bidders neutrali al rischio;**

b) **Valutazioni indipendenti ed identicamente distribuite secondo una legge *F*(.) nota a tutti**

- **Esiste una formulazione ancora più generale del teorema che recita:**

"Meccanismi d'asta cui partecipano il medesimo insieme di bidders neutrali al rischio e che assegnano utilità (profitto) nullo al bidder marginale, garantiscono al venditore il medesimo ricavo atteso INDIPENDENTEMENTE DALLA REGOLA DI PREZZO ADOTTATA"

Prezzo di riserva/ base d'asta

È quel valore del prezzo al di sotto del quale il banditore dichiara di non voler vendere l'oggetto. Bid minimo: b_*

L'oggetto viene dunque ritirato e resta presso il banditore

Il prezzo di riserva è una variabile a disposizione del banditore per incrementare il suo ricavo atteso dalla vendita

Osserviamo come il banditore, dato il valore che egli personalmente assegna al bene (il suo valore privato) possa determinare il prezzo di riserva ottimo:

Supponiamo che il venditore abbia una personale valutazione del bene pari a v_* . Quale è la base d'asta ottimale b_* ?
In presenza di base d'asta vi è la probabilità che il bene resti invenduto. Se il bene resta invenduto, ovvero nessuno degli n bidders presenta un bid almeno pari alla base d'asta, l'utilità attesa del banditore è: $v_* F\left[b_*\right]^n$

Se almeno un bid è superiore alla base d'asta, avremo che:

$$E\left[P\right] = E\left[b_{(n:n)} \middle| b_{(n:n)} \geq b_*\right]$$

Poiché il ricavo atteso è identico nel modello IPV, possiamo identificare il prezzo di riserva ottimo a partire dalla medesima funzione

Osserviamo che:

nell'asta SPSB e nell'asta English il bid non dipende dalla base d'asta

nell'asta SPSB il bidder reagisce alla base d'asta incrementando il suo bid. Infatti la base d'asta corrisponde ad una condizione iniziale più elevata rispetto al bid minimo di 0 assunto in precedenza. Utilizzando il nostro solito esempio, avremo ora un bid:

$$\beta\left(v_i\right) = \frac{\left(n-1\right)}{n} v_i + \frac{1}{n} \frac{b_*^n}{v_i^{n-1}}$$

Il ricavo atteso dell'asta, sempre restando all'esempio è ora (in rosso la pdf della più elevata valutazione tra *n*.

$$E[R]=v_*\left(\frac{b_*}{100}\right)^n+\frac{(n-1)}{n}\int_{b_*}^{100} v\cdot n\left(\frac{v}{100}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{100}dv+$$

$$+\frac{b_*^n}{n}\int_{b_*}^{100}\frac{1}{v^{n-1}}\cdot n\left(\frac{v}{100}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{100}dv$$

$$=v_*\left(\frac{b_*}{100}\right)^n+(n-1)\int_{b_*}^{100}\left(\frac{v}{100}\right)^n dv+b_*^n\int_{b_*}^{100}\left(\frac{1}{100}\right)^n dv$$

$$=v_*\left(\frac{b_*}{100}\right)^n+(n-1)\int_{b_*}^{100}\left(\frac{v}{100}\right)^n dv+\left(\frac{b_*}{100}\right)^n(100-b_*)$$

$$\max_{b_*} \; E[R]$$

$$F.O.C.$$

$$n\left(\frac{b_*}{100}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{100}(v_*+100-b_*)-\left(\frac{b_*}{100}\right)^n-(n-1)\left(\frac{b_*}{100}\right)^n=0$$

$$n(v_*+100-b_*)-b_*-(n-1)b_*=0$$

$$b_*=\frac{100+v_*}{2}$$

N:B. la base d'asta non dipende dal numero dei partecipanti all'asta.

Caso generale: (+ tecnico)

Il problema del venditore è allora quello di scegliere quel valore del prezzo minimo che risolve il seguente problema:

$$\max_{b_*} E(R) =$$

$$= v_* F(b_*)^n + n \int_{b_*}^{V} \left\{ sF(s)^{n-1} - \int_0^s F(w)^{n-1} dw \right\} f(s) ds$$

$F.O.C$:

$$v^* nF(b^*)^{(n-1)} f(b^*) - nF(b^*)^{(n-1)} \left[f(b^*) b^* - 1 + F(b^*) \right] = 0$$

Raccolgo e semplifico:

Ottengo l'equazione che definisce implicitamente il prezzo di riserva:

$$b^* = v^* + \frac{1 - F(b^*)}{f(b^*)}$$

Esempio. Supponiamo che la distribuzione della valutazioni sia uniforme nell'intervallo [0, 100]:

$$b^* = v^* + \frac{\frac{100 - b^*}{100}}{\frac{1}{100}} \qquad b^* = \frac{1}{2}\left(v^* + 100\right)$$

$$v^* = 40 \longrightarrow b^* = 70$$

Alcuni punti rilevanti sul RP

- Conviene tenere il prezzo di riserva segreto? (vedremo un esempio a proposito delle aste on-line)
  - Abbiamo dimostrato che un prezzo di riserva esplicito massimizza il ricavo atteso del venditore rispetto al caso di assenza di prezzo di riserva
- Il problema del committment
  - Deve essere credibile la minaccia di lasciare il bene invenduto in caso nessuno arrivi ad offrire almeno la base d'asta
- Prezzo di riserva e numero dei partecipanti
  - La presenza di una base d'asta riduce il numero di partecipanti, escludendone di fatto alcuni.

Aste common value

Wallet game

•P. Klemperer / European Economic Review 42 (1998), 757-769.

Select two students, and have each privately check how much money is in his or her wallet. Now announce that you will auction a prize equal to the combined contents of the wallets to these two students using a standard ascending (English) auction. That is, you will continuously raise the price until one of the students quits the bidding, and you will then pay the other student an amount equal to the combined contents of the wallets, in return for the student paying you that final price.

$$v_i = t_1 + t_2$$

Ciascuno studente osserva una parte soltanto dell'informazione.

Quale sarà la strategia ottimale?

Supponiamo che 1 resti in gioco fino a che $P = 2t_1$

Allora lo studente 2 vince ad un prezzo P, il valore che ottiene è:

$$v_2 = t_2 + \frac{1}{2}P$$

Per evitare di perdere deve essere vero che:

$$v_2 = t_2 + \frac{1}{2}P \leq P$$

ovvero:

$$P \leq 2t_2$$

Aste a valor comune

L'oggetto in vendita ha il medesimo valore per tutti i potenziali acquirenti ma nessuno lo conosce con certezza. I potenziali compratori differiscono tra loro per la stima soggettiva di questo valor comune

La stima del bidder i è: $v_i = v + \varepsilon_i$

dove il primo termine rappresenta il valore comune a tutti mentre il secondo indica l'errore di stima soggettivo del bidder i (positivo/negativo).

Supponiamo che le stime di valore siano in media corrette: se tutti i valori fossero resi pubblici, la stima del valore del bene sarebbe corretta.

Purtroppo ogni bidder osserva solo il suo segnale e l'aggiudicazione del bene avviene al maggior offerente.

Se ogni partecipante presentasse un'offerta esattamente corrispondente alla sua stima vincerebbe l'asta il bidder con il più alto errore di stima (positivo), anche con stime in media corrette.

Infatti: $v_{(n)} = v + \varepsilon_{(n)}$

$\varepsilon_{(n)} > \varepsilon_{(n-1)} > ... > \varepsilon_{(1)}$

Di conseguenza, seguendo una strategia "miope" il bidder vincente pagherebbe in media un prezzo superiore rispetto al vero valore.

Questo fenomeno prende il nome di winner's curse (maledizione del vincitore) poiché colui che ottiene il bene trae un profitto negativo dall'asta

Una strategia accorta tiene conto ex-ante del fatto che l'asta common value presenta un problema duplice per il bidder: a) un problema di stima di valore; b) un problema di strategia di bid, ovvero, data la stima di valore, che prezzo offrire in asta.

Di conseguenza, la strategia ottima in un'asta common value di primo prezzo prevede che:

1) Ciascun bidder sia consapevole che vince sole se ha ricevuto il segnale più elevato;
2) Necessariamente, segnale più elevato implica sovrastima del vero valore;
3) Nell'asta al primo prezzo un bid pari alla stima di valore comporta winner's curse.

Il winner's curse può essere evitato solo "scontando in anticipo" il fenomeno cioè incorporando nella strategia l'informazione per la quale vince chi ha estratto il segnale più alto.

Quindi la strategia ottima prevede un bid inferiore rispetto a con uno “sconto” rispetto alla valutazione che dipende positivamente dal numero dei partecipanti.

Per quanto riguarda l’asta al secondo prezzo common value occorre precisare che l’incidenza del winner’s curse è assai meno severa rispetto al caso dell’asta al primo prezzo. Infatti nell’asta al secondo prezzo il pagamento è pari al bid del secondo maggior offerente e pertanto non è necessario “scontare” il bid tanto quanto avveniva nell’asta al primo prezzo.

Questa è la ragione per la quale il bid ottimo nell’asta al secondo prezzo è maggiore di quello dell’asta al primo prezzo (cade il Revenue Equivalence)

UN ESEMPIO DI MODELLO COMMON VALUE: ASTA IN BUSTA CHIUSA AL PRIMO PREZZO

(A.1) Definiamo una variabile casuale *V* distribuita secondo una legge uniforme sull’intervallo $[\underline{v}, \overline{v}]$, per cui:

$$F(V) = \frac{V - \underline{v}}{\overline{v} - \underline{v}} \text{ per } V \in [\underline{v}, \overline{v}]$$

$$F(V) = 0 \text{ altrimenti}$$

V rappresenta il valore incerto del bene

(A.2) Ciascun bidder *i* riceve un segnale privato tratto casualmente da una distribuzione uniforme nell’intervallo

$$[V - \varepsilon, V + \varepsilon]$$

(A.3) Consideriamo un'asta in busta chiusa al primo prezzo. Date A.1 ed A.2 possiamo definire il valore atteso dell'oggetto all'asta, condizionato dal segnale informativo, come segue:

$$E\{V|x_i\} = x_i$$

Infatti, per un dato segnale x_i , $V \in [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$

$$E[V|x_i] = \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \left(\tilde{V}\frac{1}{2\varepsilon}\right) d\tilde{V} = \frac{1}{4\varepsilon}\left[V^2\right]_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon}\left[(x_i+\varepsilon)^2 - (x_i-\varepsilon)^2\right] = x_i$$

La particolare distribuzione prescelta presenta il vantaggio per cui il valore atteso del bene, condizionato dal segnale, è uguale al segnale stesso.

Calcoliamo ora una stima di valore del bene nella quale si anticipa il fatto che il vincitore è anche il maggiore offerente cioè colui che ha la stima più elevata

Questa stima è data dal valore atteso condizionato al segnale ed all'evento che il segnale stesso coincide con l'highest order statistics nell'insieme ordinato dei segnali.

$$E\{V|x_i = \max(x_1,...,x_n)\} =$$

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \frac{\tilde{V}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{x_i-\left(\tilde{V}-\varepsilon\right)}{2\varepsilon}\right)^{n-1} d\tilde{V}}{\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{x_i-\left(\tilde{V}-\varepsilon\right)}{2\varepsilon}\right)^{n-1} d\tilde{V}} =$$

Dove al denominatore usiamo la cdf dell'highest order statistics come integrale della pdf. Integro per parti il num e semplifico:

$$[E(V)|x_{(n:n)}] = (n)\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \tilde{V}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{x_i-\left(\tilde{V}-\varepsilon\right)}{2\varepsilon}\right)^{n-1} d\tilde{V}$$

$$x_i - \varepsilon + \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon}\left(\frac{x_i-\left(\tilde{V}-\varepsilon\right)}{2\varepsilon}\right)^{n} d\tilde{V} =$$

$$x_i - \varepsilon + \left[-\frac{2\varepsilon}{n+1}\left(\frac{x_i-\left(\tilde{V}-\varepsilon\right)}{2\varepsilon}\right)^{n+1}\right]_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} =$$

$$x_i + \frac{2\varepsilon - \varepsilon(n+1)}{(n+1)} =$$

$$E[V|x_{(n:n)}] = x_i - \varepsilon\frac{n-1}{n+1}$$

La valutazione del bene, condizionata all'evento della vittoria in asta, è inferiore rispetto alla valutazione non condizionata. Notiamo che la differenza tra le due stime cresce al crescere del numero *n* di bidders e decresce al crescere della precisione del segnale.

$$x_i - \frac{n-1}{n+1}\varepsilon < x_i$$

$$E[V|x_{(n:n)}] > E[V|x_i]$$

Illustriamo, senza dimostrazione la strategia ottima nell'asta FPSB common value:

$$b(x_i) = x_i - \varepsilon + \Phi(x_i)$$

$$\Phi(x_i) = \left(\frac{2\varepsilon}{n+1}\right) e^{-\frac{n}{2\varepsilon}[x_i - (\underline{v} + \varepsilon)]}$$

Aste ad oggetto multiplo

- **Borsa dell'energia elettrica**
- **Aste per i titoli di Stato**

Aste ad oggetto multiplo: singleton demand

Singleton demand: *m* oggetti in vendita con *m* < *n* vincitori (ogni vincitore ne ottiene al massimo uno).

- o Simultaneous-dependent auction: asta unica per tutti gli *m* oggetti: ciascun bidder presenta il suo bid e dall'insieme dei bids si determina l'allocazione ed i pagamenti
- o Simultaneous-independent auction: i bidders agiscono simultaneamente su *m* aste aperte indipendenti tra loro
- o Asta sequenziale caratterizzata da un numero di bidders e di oggetti decrescente

Aste ad oggetto multiplo: domanda multipla

m oggetti in vendita con *k* vincitori, *m* > *k*, (i bidders possono esprimere **domanda multipla**).

- Simultenous dependent auction: i bidders presentano un bid (b,q) che determina allocazione e prezzo. Es. share auction, ovvero una quantità totale Q viene messa in vendita e ciascun vincitore ottiene una quota del totale.
- Simulteneous independent auction: la vendita di ogni unità non dipende dal risultato della vendita delle altre unità.
- Asta sequenziale caratterizzata da un numero di oggetti decrescente ed un numero di bidders debolmente decrescente

OGGETTO MULTIPLO caso IPV

Beni identici	Simultaneous dependent	Regola di prezzo discriminativa (Pay-as-bid)
		Regola di prezzo uniforme (marginale)
	Simultaneous independent	Regola di prezzo discriminativa (Pay-as-bid)
		Regola di prezzo uniforme (marginale)
	Sequenziale *m* aste	Regola di primo prezzo
		Regola di secondo prezzo
		English clock auction

OGGETTO MULTIPLO con sinergie

Beni complementari	Simultaneous dependent	Asta combinatoria: i bidders fanno offerte su insiemi di beni Fase singola e forma scritta Regola di pay-as-bid
	Simultaneous independent	*m* ascending auctions con regola di chiusura indipendente
		m ascending auctions con regola di chiusura coordinata
	Sequenziale *m* aste	I beni vengono venduti indipendentemente ed in aste successive

Asta multi-unit sequenziale

- Gli *m* oggetti vengono messi all'asta uno ad uno in *m* procedure distinte:
- Informazione diffusa tra i partecipanti:
  - L'asta precedente è conclusa
  - L'asta precedente è conclusa con un dato prezzo reso pubblico

Regola di prezzo discriminativa

Gli *m* oggetti vengono aggiudicati agli *m* partecipanti che hanno offerto gli *m* prezzi migliori. Ciascuno di essi pagherà un prezzo pari alla sua offerta. Gli *m* beni vengono perciò venduti a prezzi diversi. Supponiamo ad esempio di costruire la statistica ordinata degli *n bids* come segue:

$$\underline{B_{(n)} > B_{(n-1)} > B_{(n-2)}} > B_{(n-3)} > \ldots > B_{(1)}$$

Se gli oggetti disponibili sono 3 i tre maggiori offerenti otterranno ciascuno 1 bene ad un prezzo pari al loro bid.

Regola di prezzo marginale (prezzo uniforme)

m oggetti identici ed *m* vincitori, che sono gli *m* partecipanti che hanno offerto di più.

Il prezzo che essi pagano è identico per tutti ed è pari alla più alta delle offerte rifiutate. Ripetiamo l'esempio sopra con 3 oggetti in vendita:

$$\underline{B_{(n)} > B_{(n-1)} > B_{(n-2)}} > B_{(n-3)} > B_{(n-4)} \ldots > B_{(1)}$$

I 3 oggetti vengono aggiudicati ai 3 partecipanti che hanno offerto $B_{(n)}, B_{(n-1)}, B_{(n-2)}$

I vincitori tuttavia pagano un medesimo prezzo pari all'offerta del primo dei non vincitori, ovvero $B_{(n-3)}$.