Richiamo di argomenti di matematica e statistica utili allo studio dei modelli d'asta

Lucia Parisio

16 aprile 2007

1 Distribuzioni continue di variabili casuali

Si consideri una variabile casuale X che può assumere qualsiasi valore compreso nell'intervallo chiuso e limitato $\left[0, \bar{X}\right]$. Definiamo la sua funzione di distribuzione $F : \left[0, \bar{X}\right] \to [0, 1]$:

$$F[x] = prob[X \leq x] \tag{D1}$$

Essa indica la probabilità di osservare un valore di X minore o uguale ad un dato valore x. Le proprietà della distribuzione F che noi assumeremo nelle nostre succesive lezioni sono le seguenti:

1. F è funzione crescente e continuamente differenziabile;
2. $F[0] = 0$ e $F\left[\bar{X}\right] = 1$

La funzione derivata della F è chiamata funzione di densità di probabilità ed indicata con f. Le proprietà che noi assumeremo per la funzione f sono le seguenti:

f è continua nell'intervallo $\left[0, \bar{X}\right]$

f è positiva.

Definizione 1 Valore atteso della variabile casuale. *Data una vc X distribuita secondo la F, definiamo il suo valore atteso come segue:*

$$E[X] = \int_0^{\bar{X}} x f(x)\, dx \tag{D2}$$

Notiamo anche che, data una funzione $\beta : \left[0, \bar{X}\right] \to \Re$, l'aspettativa di $\beta(X)$ è data da:

$$E[\beta(X)] = \int_0^{\bar{X}} \beta(x) f(x)\, dx$$

Definizione 2 *Aspettativa condizionata:*

$$E\left[X|\, X < x\right] = \frac{\int_0^x sf\left(s\right)ds}{F\left[x\right]} \tag{D3}$$

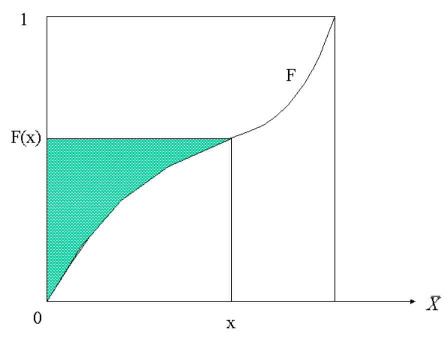
indica il valore atteso di X dato che X assume valori inferiori ad un dato valore x.

E' possibile dare una rappresentazione grafica che sarà utile ai fini del nostro corso. Moltiplichiamo i due lati della (D3) per $F[X]$ e successivamente integriamo per parti il lato destro, otteniamo:

$$F\left[X\right] E\left[X|\, X < x\right] = xF\left[x\right] - \int_0^x F\left(s\right)ds \tag{D4}$$

In generale possiamo rappresentare la funzione di probabilità F come segue:

Figura 1: Distribuzione di probabilità e valore atteso



La (D4) può essere rappresentata come l'area colorata nella Figura 1 (sopra la F).

2 Distribuzioni condizionate

Considero due variabili casuali, X ed Y che per comodità assumiamo distribuite sul medesimo supporto $\left[0, \bar{X}\right]$. Dato $x' < x''$ definiamo la distribuzione di probabilità congiunta di X ed Y come segue:

$$\Pr\text{ob}\left[x' < X < x'' \quad e \quad x' < Y < x''\right] = \int_{x'}^{x''} \int_{x'}^{x''} f\left(x, y\right) dxdy$$

La densità marginale di X può essere ottenuta dalla densità congiunta integrando:

$$f_X\left(x\right) = \int_0^{\bar{X}} f\left(x, y\right) dy$$

Definizione 3 *Variabili casuali indipendenti*

Due v.c. sono indipendenti se la distribuzione congiunta è data dal prodotto delle due marginali:

$$f\left(x, y\right) = f_X\left(x\right) f_Y\left(y\right)$$

Definizione 4 *Distribuzioni condizionate*

Dato un $y > 0$, definiamo la densità di X condizionata dall'evento $Y = y$ come segue:

$$f_X\left(\left. X \right| Y = y\right) = \frac{f\left(x, y\right)}{f_Y\left(y\right)}$$

Data la densità condizionata, è possibile definire il valore atteso condizionato di X, dato che $Y = y$:

$$E\left[\left. X \right| Y = y\right] = \int_0^{\bar{X}} x f_X\left(\left. X \right| Y = y\right) dx$$

3 Statistiche ordinate

Si supponga che $(X_1, X_2, ..., X_N) \geq 0$ sia un campione di dimensione N di variabili casuali indipenenti - ad esempio i redditi di un gruppo di persone di un certo Paese in un certo momento - tale che ciascuna $X_{i \in N}$ segua una legge di probabilità data dalla funzione $F(\cdot)$. Le statistiche ordinate corrispondenti al suddetto campione sono rappresentate dai valori delle X ordinati in modo o crescente o decrescente. Nel caso di ordinamento crescente, il minore di tali valori ordinati è indicato con il simbolo $X_{(1)}$ o a volte con il simbolo $X_{(1:N)}$, dove l'ultima scrittura mette in maggior evidenza il fatto che ci si riferisce al primo (più basso) valore su N possibili valori. Nell'esempio, tale valore corrisponderà al reddito del più povero (meno ricco) dei componenti il gruppo delle N persone. Analogamente, il secondo (più basso) valore si indica con $X_{(2)}$ o $X_{(2:N)}$, e cosi via sino all'ennesimo (il più alto) valore che si indica con $X_{(N)}$ o $X_{(N:N)}$ e che, nell'esempio, corrisponderà al reddito della persona più ricca inclusa nel campione. Lo studio delle statistiche ordinate riguarda allora l'analisi delle proprietà della successione

$$X_{(1:N)}, X_{(2:N)}, ..., X_{(N:N)}$$

date alcune ipotesi sulla natura della variabile casuale X_i e della sua funzione di ripartizione $F(\cdot)$. In particolare, ci concentreremo sui valori agli estremi della successione e sullo studio degli intervalli tra valori inclusi nella successione (studio del *range*). Sottolineiamo subito che in queste dispense le X_i originarie verranno assunte come se distribuite in modo identico ed indipendente. Va da sé che le variabili ordinate, date le relazioni di disuguaglianza esistenti tra loro, non sono invece indipendenti.

3.1 La Distribuzione di Statistiche Ordinate

Si assuma che $X_1, X_2, ..., X_N$ sia un campione casuale estratto da una popolazione a valori continui avente una distribuzione cumulata CDF indicata con $F(x)$ ed una densità pdf indicata con $f(x) = F'(x)$. Sia

$$X_{(1:N)} \leq X_{(2:N)} \leq ... \leq X_{(N:N)}$$

la successione ordinata ottenuta ponendo i valori registrati nel suddetto campione in ordine non decrescente. Allora, per un qualsiasi $i \in \{1, ..., N\}$,

$$\Pr\left\{x < X_{(i:N)} \leq x + \delta x\right\}$$

indica la probabilità che $X_{(i:N)}$ sia interno all'intervallo definito sopra. Visualizziamo tale evento come segue

$$0 \; \underset{---}{\scriptstyle i-1} \;]_x \;\; \underset{---}{\scriptstyle 1} \;]_{x+\delta x} \; \underset{-----------}{\scriptstyle N-i} \; \infty$$

Lungo la retta giacciono tutti i punti corrispondenti ai valori di x compresi tra zero e infinito. Le parentesi circoscrivono l'intervallo definito da x e δx. L'evento

$x < X_{(i:N)} \leq x + \delta x$ è quindi esprimibile come la combinazione dell'evento dato da $X_{(i:N)} \leq x$ per un numero $i-1$ di casi, di $x < X_{(i:N)} \leq x+\delta x$ per esattamente un caso e di $X_{(i:N)} > x + \delta x$ per i rimanenti $N - 1 - (i - 1) = N - i$ casi. Se assumiamo che δx sia molto piccolo scriviamo

$$\Pr\left\{x < X_{(i:N)} \leq x + \delta x\right\} =$$

$$\frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \left[F(x)\right]^{i-1} \left[1 - F(x + \delta x)\right]^{N-i} \left[F(x + \delta x) - F(x)\right] +$$
$$O\left[(\delta x)^2\right] \tag{1}$$

Esaminiamo ciscuna componente della (1) alla luce del grafico precedente. La $\left[F(x)\right]^{i-1}$ indica la probabilità di avere $i-1$ casi di valori inferiori a x; $\left[1 - F(x + \delta x)\right]^{N-i}$ indica la probabiltà di avere $N-i$ casi di valori superiori a $x+\delta x$; $\left[F(x + \delta x) - F(x)\right]$ indica la probabilità di avere un caso nell'intervallo $]x, x + \delta x]$ e $O\left[(\delta x)^2\right]$ indica la probabilità che nell'intervallo $]x, x + \delta x]$ sia compreso più di un caso. Da adesso in poi supporremo che tale ultima probabilità sia pari a zero. In pratica è come se supponessimo che non si verificano mai dei "pareggi". Ricordiamo inoltre che la popolazione dalla quale è estratto il campione casuale ha valori assolutamente continui. Con i dati relativi alla distribuzione dei redditi, ad esempio, ciò equivale a supporre che non ci possono essere due o più individui con lo stesso reddito e che non ci sono valori del reddito appartenenti all'intervallo tra il massimo e il minimo per i quali non esista una corrispondente probabilità. Queste probabilità sono moltiplicate per un termine che indica il numero totale di combinazioni degli $i - 1$ casi relativi ai valori inferiori a x con gli $N - i$ casi relativi a valori superiori a $x+\delta x$ e con l'unico caso di valori compresi nell'intervallo $]x, x + \delta x]$. Il coefficiente binomiale corrisponde al numero delle possibili combinazioni dei casi indicati (ricordare che $1! = 1$).

Per derivare la densità della $X_{(i:N)}$ procediamo come segue. Dividiamo l'espressione di $\Pr\left\{x < X_{(i:N)} \leq x + \delta x\right\}$ per δx e in tal modo definiamo la probabilità "media" sull'intero intervallo che il valore $X_{(i:N)}$ sia compreso tra x e $x + \delta x$. Successivamente, prendiamo il limite, per δx tendente a zero, di questo valore "medio":

$$\lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{\Pr\left\{x < X_{(i:N)} \leq x + \delta x\right\}}{\delta x}\right]$$
$$= \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \left[F(x)\right]^{i-1} \left[1 - F(x)\right]^{N-i} \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{\left[F(x + \delta x) - F(x)\right]}{\delta x}\right]$$
$$= \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \left[F(x)\right]^{i-1} \left[1 - F(x)\right]^{N-i} f(x) \tag{2}$$

Dalla nozione di derivata quale limite del rapporto incrementale ricaviamo che l'espressione di cui sopra, che indicheremo con $f_{(i:N)}(x)$, rappresenta la pdf dell'i.ma statistica ordinata.

Ponendo $i = 1$, dalla (2) possiamo ottenere la pdf della statistica che occupa il primo posto nella successione ordinata (*first order statistics*) che è data da

$$\begin{aligned} f_{(1:N)}(x) &= \frac{N!}{(N-1)!} [F(x)]^{1-1} [1 - F(x)]^{N-1} f(x) \qquad (3) \\ &= N [1 - F(x)]^{N-1} f(x) \end{aligned}$$

mentre quella della statistica che occupa l'ultimo posto (*largest order statistics*) è data, ponendo $i = N$, da

$$\begin{aligned} f_{(N:N)}(x) &= \frac{N!}{(N-1)!} [F(x)]^{N-1} [1 - F(x)]^{N-N} f(x) \qquad (4) \\ &= N [F(x)]^{N-1} f(x) \end{aligned}$$

Integrando la (3) otteniamo la corrispondente funzione di probabilità CDF come segue

$$\begin{aligned} F_{(1:N)} &= \int_0^x N [1 - F(\tilde{x})]^{N-1} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= -[1 - F(\tilde{x})]^N \Big]_0^x \\ &= -[1 - F(x)]^N + [1 - F(0)]^N \\ &= 1 - [1 - F(x)]^N \end{aligned}$$

poiché $F(0) = 0$. Analogamente, integrando la (4):

$$\begin{aligned} F_{(N:N)} &= \int_0^x N [F(\tilde{x})]^{N-1} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= [F(x)]^N \end{aligned}$$

Esercizio 1

Ricavare la pdf e la CDF del *second order statistics* $X_{(2:N)}$ (il valore immediatamente più alto dopo il più basso: quello relativo al "secondo posto"; la $X_{(2:N)}$ è quindi la variabile che descrive la distribuzione dei valori che possono occupare il secondo posto nella successione ordinata dei valori campionari) di $X_{(1:N)} < X_{(2:N)} < ... < X_{(N:N)}$.

$$\begin{aligned} f_{(2:N)}(x) &= \frac{N!}{(2-1)!(N-2)!} [F(x)]^{2-1} [1 - F(x)]^{N-2} f(x) \\ &= \frac{N(N-1)(N-2)!}{(N-2)!} [F(x)] [1 - F(x)]^{N-2} f(x) \\ &= N(N-1) [F(x)] [1 - F(x)]^{N-2} f(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_{(2:N)} &= \int_0^x \left[(N-1)\left[1-F(\tilde{x})\right]^{N-2} f(\tilde{x})\right]\left[NF(\tilde{x})\right] d\tilde{x} \\
&= -\left[1-F(\tilde{x})\right]^{N-1}\left[NF(\tilde{x})\right]\Big|_0^x + \int_0^x N\left[\left[1-F(\tilde{x})\right]^{N-1}\right]\left[f(\tilde{x})\right] d\tilde{x} \\
&= 1-\left[1-F(x)\right]^{N-1}\left[1+(N-1)F(x)\right]
\end{aligned}$$

Derivando la $F_{(2:N)}$ si ottiene la $f_{(2:N)}(x)$.

Esempio 1 ***(Statistiche ordinate equidistribuite)***

Si supponga che $x \sim U(0,1)$ e che quindi $f(x) = 1$ su $[0,1]$ e $F(x) = x$. E' agevole ricavare che

$$\begin{aligned}
f_{(1:N)}(x) &= N(1-x)^{N-1} \\
f_{(N:N)}(x) &= Nx^{N-1}
\end{aligned}$$

4 Applicazioni

4.1 L'asta al primo prezzo con due partecipanti

I modelli d'asta occuperanno una posizione di rilevo nell'ambito delle applicazioni economiche trattate al termine dei vari Capitoli. Il tratto comune di questi modelli[1] consiste nella presenza di informazione incompleta, ovvero i partecipanti all'asta devono elaborare la loro strategia in condizioni di incertezza strategica sulle azioni dei partecipanti ed in più senza conoscere il "tipo" cui i singoli antagonisti appartengono. L'incertezza strategica è una caratteristica tipica dei giochi simultanei in cui ogni giocatore deve agire senza sapere cosa fa (fanno) il suo (suoi) avversario(i). L'incertezza sui tipi riguarda invece l'assenza di informazione su una caratteristica dell'avversario rilevante per la definizione della strategia. In questo contesto l'assenza di informazione sulle caratteristiche viene tramutata in incertezza sulle caratteristiche mediante l'ipotesi di conoscenza comune della distribuzione di probabilità da cui i tipi sono tratti[2]. In questo modo il gioco ad informazione incompleta viene trasformato in gioco

[1] Per una trattazione sistematica dei modelli d'asta esistono ora numerosi volumi monografici. Si veda in particolare, L. Parisio, *Meccanismi d'asta*, Carocci Editore, (1999), P. Klemperer ed., *The Economic theory of auctions*, The international library of critical writings in economics series, Edward Elgar, (2000); V. Krishna, *Auction theory*, Academic Press, (2002); F.M. Menezes e P.K. Monteiro, *An introduction to auction theory*, Oxford University Press, (2005).

[2] Per una completa trattazione dei giochi ad informazione incompleta, si rimanda a Fudenberg e Tirole, *Game Theory*,MIT Press, (1991).

ad informazione imperfetta e può essere applicato il concetto di equilibrio di Nash-Bayes.

Supponiamo che un bene venga venduto all'asta e che vi siano due potenziali acquirenti. Essi vengono richiesti dal banditore di presentare un'offerta in busta chiusa. Il maggiore offerente si aggiudicherà il bene pagando un prezzo pari all'offerta che ha scritto nella sua busta. Supponiamo ancora che i due acquirenti i, j abbiano una valutazione positiva del bene v_i, v_j. Il partecipante i osserva v_i mentre j osserva solo v_j. Entrambi considerano la valutazione dell'avversario come una variabile casuale tratta da una distribuzione nota che indicheremo con $F(v)$. Le valutazioni sono variabili casuali i.i.d., per cui dal punto di vista dell'individuo i, $F(v_i) = \Pr\{v_j \leq v_i\}$. Le informazioni sulla distribuzione delle valutazioni e sulle credenze di entrambi i partecipanti sono comuni. Date le regole d'asta, la strategia ottima dell'individuo i sarà una funzione di bid $b_i = \beta(v_i)$ che trasforma la valutazione in bid. La funzione di bid $\beta(.)$ costituisce un equilibrio simmetrico del gioco se $\beta(v_i)$ costituisce una risposta ottima alla strategia $\beta(v_j)$ giocata dall'individuo i[3].

Supponiamo che $b_j = \beta(v_j)$ sia in effetti il bid di j, con $\beta(.)$ funzione continua, monotona non-decrescente (e quindi invertibile) rispetto al suo argomento. In questa ipotesi la probabilità di i di vincere l'asta, data la distribuzione $F(.)$, è data da:

$$\begin{aligned}
\Pr\{b_j < b_i\} &= \Pr\{\beta(v_j) < b_i\} \\
&= \Pr\{v_j < \sigma(b_i)\} \\
&= F[\sigma(b_i)]
\end{aligned}$$

ove $\sigma(.)$ indica la funzione inversa di $\beta(.)$. Per ottenere la probabilità di vittoria di i abbiamo applicato la tecnica della trasformazione di v.c. basata sulla c.d.f (si veda il paragrafo 1.5.1).

Il surplus atteso di i è definito allora da:

$$\begin{aligned}
E[\Pi_i] &= [v_i - b_i] F[\sigma(b_i)] \\
&= 0 \qquad \text{se non vince l'asta}
\end{aligned}$$

Risolviamo il problema di i massimizzando rispetto al bid b_i il suo profitto atteso:

$$\max_{b_i} [v_i - b_i] F[\sigma(b_i)]$$

le condizioni del primo ordine del problema sono:

$$-F[\sigma(b_i)] + [v_i - b_i] f[\sigma(b_i)] \frac{d\sigma}{db_i} = 0$$

Osserviamo che, date le nostra assunzioni su $\beta(.)$,

$$\frac{d\sigma}{db_i} = \frac{1}{\frac{db_i}{dv_i}}$$

[3] Il concetto di equilibrio rilevante in questo caso è quello di Nash-Bayes.

e che nel caso $\beta(.)$ sia effettivamente l'equilibrio che cerchiamo deve verificarsi che $\sigma(b_i) = v_i$. Sostituendo, otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{db_i}{dv_i} &= [v_i - b_i] \frac{f(v_i)}{F(v_i)} \qquad (5) \\ \frac{db_i}{dv_i} + b_i r(v_i) - v_i r(v_i) &= 0 \end{aligned}$$

ove $r(v)$ è definito nel paragrafo 2.4.1. Consideriamo la parte omogenea (omettendo i pedici):

$$\begin{aligned} \frac{db}{dv} &= -b \cdot r(v) \\ \frac{b'}{b} &= r(v)\, dv \\ \log b(v) &= -\int_0^v r(\tilde{v})\, d\tilde{v} \end{aligned}$$

ovvero,

$$b = \exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\, d\tilde{v}\right] \qquad (6)$$

la soluzione generale all'equazione differenziale è allora data da:

$$b(v) = K(v) \exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\, d\tilde{v}\right] \qquad (7)$$

ove $K(v)$ indica la soluzione particolare. Dalla (7), differenziando rispetto a v, otteniamo:

$$b' = K'(v) \exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\, d\tilde{v}\right] - K(v) \exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\, d\tilde{v}\right] r(v)$$

Sostituendo b' nelle f.o.c. ed usando la (7), otteniamo:

$$\begin{aligned} K'(v) \exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\, d\tilde{v}\right] - K(v) \exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\, d\tilde{v}\right] r(v) &= \\ -K(v) \exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\, d\tilde{v}\right] r(v) - vr(v) &= 0 \\ K'(v) \exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\, d\tilde{v}\right] - vr(v) &= 0 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} K'(v) &= vr(v)\exp\left[\int_0^v r(\tilde{v})\,d\tilde{v}\right] \\ K(v) &= \int_0^v \left(\tilde{v}r(\tilde{v})\exp\left[\int_0^v r(s)\,ds\right]\right)d\tilde{v} + Z \end{aligned}$$

ove Z è la costante di integrazione. Sostituendo $K(v)$ nella (7) otteniamo:

$$b = Z\exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\,d\tilde{v}\right] + \exp\left[-\int_0^v r(\tilde{v})\,d\tilde{v}\right]\int_0^v \left(\tilde{v}r(\tilde{v})\exp\left[\int_0^v r(s)\,ds\right]\right)d\tilde{v}$$

Per trovare la costante di integrazione Z dobbiamo fare riferimento al supporto della distribuzione delle valutazioni. Imponendo la condizione iniziale[4] $\beta(0) = 0$, allora $Z = 0$ e quindi:

$$b = \frac{\int_0^v \left(\tilde{v}r(\tilde{v})\exp\left[\int_0^v r(s)\,ds\right]\right)d\tilde{v}}{\exp\left[\int_0^v r(\tilde{v})\,d\tilde{v}\right]}$$

Dalla tabella del paragrafo 2.4.2 osservo che:

$$r(v)\exp\left[\int_0^v r(\tilde{v})\,d\tilde{v}\right] = f(v)$$

poichè

$$\exp\left[\int_0^v r(\tilde{v})\,d\tilde{v}\right] = \exp\int_0^v \frac{d\log F(.)}{d\tilde{v}} = F(v)$$

Quindi è possibile riscrivere la strategia di equilibrio dell'individuo i come:

$$b_i = \frac{\int_0^{v_i} \tilde{v}f(\tilde{v})\,d\tilde{v}}{F(v_i)}$$

Utilizzando infine la definizione della vita media residua nel paragrafo 2.3.3, posso riscrivere ancora la funzione di bid dell'individuo i come segue:

$$b_i = v_i - \frac{\int_0^v F(\tilde{v})\,d\tilde{v}}{F(v_i)} \tag{8}$$

[4] Un bidder che ha la valutazione più bassa ammissibile non farà razionalmente un bid superiore allo zero, ma nemmeno un bid negativo e quindi offrirà zero.

Ovvero il bidder i assume nella sua strategia di essere colui che ha la maggiore valutazione tra le due e presenta un bid pari al valore atteso di v_j dato che $v_i > v_j$.

Esempio 2 *Distribuzione uniforme*

Supponiamo che, dato un supporto $[a, d]$

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{v-a}{d-a} \\ f(v) &= \frac{1}{d-a} \end{aligned}$$

allora la (8) diviene:

$$b_i = v_i - \frac{\int_a^v \frac{\tilde{v}-a}{d-a} d\tilde{v}}{\left(\frac{v_i-a}{d-a}\right)}$$

e quindi

$$\begin{aligned} b_i &= v_i - \frac{1}{v_i - a} \cdot \left(\frac{1}{2}\tilde{v}^2 - a\tilde{v}\right)_a^{v_i} \\ &= v_i - \frac{1}{v_i - a}\left[\left(\frac{1}{2}v_i^2 - av_i\right) - \left(\frac{1}{2}a^2 - a^2\right)\right] \\ &= v_i - \frac{1}{v_i - a}\left(\frac{1}{2}v_i^2 - av_i + \frac{1}{2}a^2\right) \\ &= v_i - \frac{1}{2}\frac{(v_i - a)^2}{(v_i - a)} \\ &= v_i - \frac{1}{2}(v_i - a) = \frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}a \end{aligned}$$

da cui otteniamo, per il caso speciale di $a = 0$, che $b_i = \frac{1}{2}v_i$, ovvero che il bidder presenterà un'offerta pari alla metà della sua valutazione. Poichè si tratta di un equilibrio simmetrico, otteniamo che chiunque sia il vincitore, egli pagherà un prezzo pari alla metà soltanto della sua disponibilità. Questo fenomeno di sottostima del bid d'asta prende talvolta il nome di *bid shading* ed è una caratteristica tipica delle procedure d'asta di primo prezzo. Nel Capitolo 3 generalizzeremo il risultato al caso di n bidders con $n > 2$.

Esempio 3 *Distribuzione esponenziale*

Supponiamo ora che $F(v) = [1 - \exp(-\lambda v)]$. Questa volta il bid di equilibrio è dato da:

$$\begin{aligned}
b_i &= v_i - \frac{\int\limits_0^{v_i} \left(1 - \exp\left[-\lambda \tilde{v}\right]\right) d\tilde{v}}{1 - \exp\left[-\lambda v_i\right]} \\
&= v_i - \left[\frac{v_i - \frac{1}{\lambda}\left(1 - \exp\left[-\lambda v_i\right]\right)}{\left(1 - \exp\left[-\lambda v_i\right]\right)}\right] \\
&= \frac{1}{\lambda} - \frac{v_i \exp\left[-\lambda v_i\right]}{\left(1 - \exp\left[-\lambda v_i\right]\right)}
\end{aligned}$$

Osserviamo che, per $v_i \to \infty, b_i \to \frac{1}{\lambda}$, ovvero al valore medio delle valutazioni. Per valutazioni finite, il bid è sempre inferiore alla media.

4.2 Asta in busta chiusa al secondo prezzo (Vickrey auction).

In questa forma d'asta vince il maggior offerente e paga un prezzo pari alla seconda maggiore offerta. Vickrey (1961) dimostra che è strategia debolmente dominante quella di presentare un'offerta pari alla propria vera valutazione del bene in vendita[5]. Di conseguenza, la distribuzione delle offerte coincide con la distribuzione originaria delle valutazioni. Sia allora $F(x)$ la CDF delle valutazioni che supponiamo comprese nell'intervallo finito $\left[0, \bar{X}\right]$ con $F\left(\bar{X}\right) = 1$, e

$$X_{(1:N)} < X_{(2:N)} ... < X_{(N-1:N)} < X_{(N:N)}$$

la statistica ordinata delle valutazioni/bids. Dal punto di vista del banditore le offerte dei partecipanti sono variabili casuali. Quale sarà il ricavo atteso dal venditore (prezzo d'asta)? Data la regola di secondo prezzo occorre calcolare il valore atteso della seconda maggiore offerta $X_{(N-1:N)}$.

$$\begin{aligned}
E\left[X_{(N-1:N)}\right] &= \int_0^{\bar{X}} \tilde{x} N (N-1) \left[1 - F(\tilde{x})\right] F(\tilde{x})^{N-2} f(\tilde{x})\, d\tilde{x} \\
&= \bar{X} - \int_0^{\bar{X}} F(\tilde{x})^{N-1} \left[N - NF(\tilde{x}) + F(\tilde{x})\right] d\tilde{x} \\
&= \bar{X} - N \int_0^{\bar{X}} F(\tilde{x})^{N-1} d\tilde{x} + (N-1) \int_0^{\bar{X}} \left[F(\tilde{x})^{N}\right] d\tilde{x}
\end{aligned}$$

Nel caso di distribuzione originaria $U\left[0, \bar{X}\right]$ avremo:

$$E\left[X_{(N-1:N)}\right] = \bar{X} \frac{N-1}{N+1}$$

Il prezzo d'asta converge all'estremo superiore della distribuzione per un numero di partecipanti che tende all'infinito.

[5] La dimostrazione avviene mediante il procedimento di eliminazione delle strategie dominate (vedi L. Parisio, 1999).

4.3 Varianza del prezzo nell'asta SPSB

Noto che,

$$Var\,[P]_{SP} = \int_0^{\infty} x^2 f_{(N-1:N)}(x)dx - \left[\int_0^{\infty} x f_{(N-1:N)}(x)dx\right]^2 \qquad (9)$$

per cui il secondo termine indica il quadrato del prezzo atteso ed il primo termine il momento secondo della distribuzione. Nel caso di distribuzione uniforme su $[0, 1]$ utilizzando le applicazioni precedenti ove abbiamo calcolato il prezzo atteso d'asta, avremo:

$$\begin{aligned} Var\,[P]_{SPSB} &= \int_0^1 \tilde{x}^2 N\,(N-1)\,[1-\tilde{x}]\,\tilde{x}^{N-2} d\tilde{x} - \left[\frac{N-1}{N+1}\right]^2 \qquad (10) \\ &= N\,(N-1)\int_0^1 \left[\tilde{x}^N - \tilde{x}^{N+1}\right] d\tilde{x} - \left[\frac{N-1}{N+1}\right]^2 \\ &= \frac{N\,(N-1)}{N+1} - \frac{N\,(N-1)}{N+2} - \left[\frac{N-1}{N+1}\right]^2 \\ &= \frac{N\,(N-1)}{(N+1)\,(N+2)} - \left[\frac{N-1}{N+1}\right]^2 \end{aligned}$$

4.4 Asta in busta chiusa al primo prezzo

In questa forma d'asta vince chi presenta la maggiore offerta e paga un prezzo pari alla sua offerta. Dal punto di vista del banditore, il prezzo atteso è pari al valore atteso del maggior bid.

$$\int_0^{\bar{X}} \tilde{b} f_{(N:N)}\left(\tilde{b}\right) d\tilde{b}$$

per calcolare il prezzo atteso dobbiamo ricavare la distribuzione di probabilità dei bids nell'asta in busta chiusa al primo prezzo. A questo fine, dobbiamo in primo luogo definire la strategia di equilibrio dei partecipanti.

4.5 Equilibrio simmetrico dell'asta in busta chiusa al primo prezzo

Supponiamo che esista un equilibrio simmetrico $\beta(\cdot)$, funzione crescente della valutazione. Verifichiamo quali sono le caratteristiche di questa funzione di equilibrio.

Il bidder i osserva la sua sola valutazione x_i mentre considera le altre $N-1$ valutazioni come variabili casuali tratte in modo indipendente dalla distribuzione $F(\cdot)$. Se tutti gli $N-1$ avversari seguono la strategia $\beta(\cdot)$, quale sarà la risposta del bidder i?

Definiamo il profitto atteso del bidder i quando gli altri bidders seguono $\beta(\cdot)$. Ilprofitto monetario è dato dalla differenza tra valutazione e prezzo/bid, ovvero $(x_i - b_i)$, se il bidder i vince l'asta, mentre è pari a 0 altrimenti. La probabilità di vincere l'asta coincide con la probabilità di presentare il bid più elevato ovvero:

$$b_i > Y_{(N-1:N-1)} = \beta\left(X_{(N-1:N-1)}\right)$$

dove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che β è assunta come funzione crescente delle valutazioni. Il profitto atteso del bidder i è definito allora come segue:

$$E\left[\Pi_i\right] = (x_i - b)\, F_{(N-1:N-1)}\left(\beta^{-1}(b)\right) \tag{11}$$

dove $\beta^{-1}(b)$ indica quel valore della valutazione che nell'equilibrio simmetrico genera un valore del bid pari a b. Massimizzando la (11) rispetto al bid b, otteniamo le seguenti FOC:

$$(x_i - b)\, f_{(N-1:N-1)}\left(\beta^{-1}(b)\right)\frac{\partial \beta^{-1}}{\partial b} - F_{(N-1:N-1)}\left(\beta^{-1}(b)\right) = 0$$

Noto che se $\beta(x_i)$ definisce un equilibrio simmetrico ed è funzione continua e crescente, allora: $\beta^{-1}(b) = x_i$ e $\frac{\partial \beta^{-1}}{\partial b} = \frac{1}{\beta'}$. Riscrivo le FOC come segue:

$$\beta'(x_i)\, F_{(N-1:N-1)}(x_i) + \beta(x_i)\, f_{(N-1:N-1)}(x_i) = x_i f_{(N-1:N-1)}(x_i)$$

che si riscrive come:

$$\frac{d}{dx_i}\left[\beta(x_i)\, F_{(N-1:N-1)}(x_i)\right] = x_i f_{(N-1:N-1)}(x_i)$$

Utilizzando la condizione iniziale per la quale $\beta(0) = 0$, risolviamo l'equazione differenziale precedente come segue:

$$\beta(x_i) = \frac{\int_0^{x_i} \tilde{x} f_{(N-1:N-1)}(\tilde{x})}{F_{(N-1:N-1)}(x_i)} d\tilde{x} \tag{12}$$

E' possibile dimostrare che la (12) costituisce un equilibrio simmetrico dell'asta al primo prezzo. Osservo innanzitutto che il bid definito dalla (12) equivale a:

$$E\left[\left. X_{(N-1:N-1)}\right| X_{(N-1:N-1)} < x_i\right]$$

Infatti,

$$\frac{f_{(N-1:N-1)}(\tilde{x})}{F_{(N-1:N-1)}(x_i)} = f_{(N-1:N-1)}\left(\tilde{x}\right|\left.\tilde{x} < x_i\right)$$

4.6 Revenue Equivalence

Sfruttando la proprietà del valore atteso di funzione di variabile casuale continua (VEDI 2.1) abbiamo che il ricavo atteso dell'asta in busta chiusa al primo prezzo è dato da:

$$\int_0^{\bar{X}} E\left[\left. X_{(N-1:N)}\right| X_{(N:N)} = \tilde{x}\right] f_{(N:N)}(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

$$E\left[P\right]=\int_0^{\bar{X}}\int_0^{x_i}\tilde{x}f_{(N-1:N-1)}\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x}\frac{f_{(N:N)}\left(x_i\right)}{F_{(N-1:N-1)}\left(x_i\right)}dx_i$$

poichè

$$\frac{f_{(N:N)}\left(x_i\right)}{F_{(N-1:N-1)}\left(x_i\right)}=\frac{NF\left(x_i\right)^{N-1}f\left(x_i\right)}{F\left(x_i\right)^{N-1}}=Nf\left(x_i\right)$$

riscrivo, quindi:

$$E\left[P\right]=\int_0^{\bar{X}}\left[\left(\int_0^{x_i}\tilde{x}f_{(N-1:N-1)}\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x}\right)Nf\left(x_i\right)\right]dx_i$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned}
E\left[P\right] &= N\int_0^{\bar{X}}\tilde{x}f_{(N-1:N-1)}\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x}-N\int_0^{\bar{X}}\tilde{x}\left(N-1\right)F\left(\tilde{x}\right)^{N-1}f\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x} \\
&= N\left(N-1\right)\int_0^{\bar{X}}\tilde{x}F\left(\tilde{x}\right)^{N-2}\left(1-F\left(x\right)\right)f\left(\tilde{x}\right)d\tilde{x} \\
E\left[P\right] &= E\left[X_{(N-1:N)}\right]
\end{aligned}$$

Il prezzo uguaglia il valore atteso del *second-highest* $X_{(N-1:N)}$ di un campione di taglia N. Ma quest'ultimo è il ricavo atteso dell'asta in busta chiusa al secondo prezzo.

Esempio 4 *Distribuzione uniforme*

Nel caso di valutazioni tratte da una originaria uniforme nell'intervallo $\left[0,\bar{X}\right]$, avremo:

$$\begin{aligned}
\beta\left(x_i\right) &= \int_0^{\bar{X}}\tilde{x}\frac{\left(N-1\right)\tilde{x}^{N-2}d\tilde{x}}{x_i^{N-1}}=\frac{\left(N-1\right)}{x_i^{N-1}}\int_0^{\bar{X}}\tilde{x}^{N-1}d\tilde{x} \\
b_i &= \frac{N-1}{N}x_i
\end{aligned}$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{N-1}{N}\bar{X}}\left[\tilde{b}f_{(N:N)}\left(b\right)\right]d\tilde{b} &= \bar{X}\frac{N-1}{N}-\int_0^{\frac{N-1}{N}\bar{X}}\left(\frac{N}{N-1}\frac{1}{\bar{X}}\tilde{b}\right)^N d\tilde{b} \\
&= \bar{X}\frac{N-1}{N+1}
\end{aligned}$$

Il risultato coincide con quello ottenuto nel caso di asta in busta chiusa al secondo prezzo.

4.7 Varianza del prezzo nell'asta FPSB

Osservo che:

$$Var\,[P]_{FP} = \int_0^{\bar{X}} [\beta\,(x)]^2\, f_{(N:N)}\,(x)\,dx - \left[\int_0^{\bar{X}} \beta\,(x)\, f_{(N:N)}\,(x)\,dx\right]^2$$

nel caso di distribuzione uniforme nell'intervallo unitario, abbiamo che:

$$\begin{aligned} Var\,[P]_{FP} &= \int_0^1 \frac{(N-1)^2}{N^2} x^2 N x^{N-1} dx - \frac{(N-1)^2}{(N+1)^2} \\ &= \frac{(N-1)^2}{N\,(N+2)} - \frac{(N-1)^2}{(N+1)^2} \end{aligned} \tag{13}$$

4.8 Confronto la varianza dei prezzi nelle due procedure, FP e SP

E' facile dimostrare che

$$Var\,[P]_{SP} > Var\,[P]_{FP}$$

per il caso uniforme su $[0, 1]$ è sufficiente confrontare la (10) con la (13). E' possibile osservare che il prezzo dell'asta FP segue una distribuzione uniforme su $\left[0, \frac{(N-1)}{N}\right]$, mentre il prezzo dell'asta SP segue una distribuzione uniforme sull'intervallo $[0, 1]$. Poichè i due prezzi hanno il medesimo valore atteso, concludiamo che la distribuzione del prezzo dell'asta SP è un *mean preserving spread* della distribuzione del prezzo nella FP.

5 Reliability Theory (cenni)

Definiamo l'hazard rate della distribuzione F considerata nei precedenti paragrafi come il rapporto tra F' ed $(1-F)$, ovvero:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

Una delle applicazioni più elementari e classiche del rapporto avviene a proposito della durata delle lampadine. In questo caso, la variabile x indica il tempo ed $F(x)$ indica la probabilità che la lampadina si bruci prima dell'istante x. Ovviamente, $1-F(x)$ indica la probabilità che la lampadina NON si sia bruciata prima dell'istante x. L'hazard rate indica la probabilità che un evento avvenga esattamente nell'istante x, dato che esso non si è verificato dal tempo 0 al tempo x. Nel caso della lampadina, il rapporto indica la probabilità che la lampadina si bruci nell'istante x dato che NON si è bruciata dall'inizio fino al momento x.

Nelle applicazioni che introdurremo in seguito, considereremo hazard rates positivi e non-decrescenti. Ad esempio, nel caso di distribuzione uniforme definita nell'intervallo $[0,1]$, l'hazard rate è dato da:

$$\lambda(x) = \frac{1}{1-x}$$

La distribuzione esponenziale:

$$F(x) = 1 - \exp[-\lambda x]$$

ha un hazard rate

$$\frac{\lambda \exp[-\lambda x]}{\exp[-\lambda x]} = \lambda$$

che è una costante positiva.

Talvolta accade di trovare la funzione:

$$\rho(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

che è detta hazard rate inverso.